Departamento de Matemáticas – Universidad de los Andes

Examen de Conocimiento — Lógica

18 de Julio 2018

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Las respuestas deben ser justificadas.

Favor marcar cada hoja únicamente con su cédula (**no***** indique su nombre).**

Tiempo máximo: 180 minutos.

I. Sea T una teoría consistente en un vocabulario $\mathbb{L}$. Suponga que existen fórmulas $\{\phi_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\{\psi_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}}$ en la variable x tales que

$$T \models \forall x[(\vee_{i=0}^{\infty}\phi_i(x)) \leftrightarrow (\wedge_{i=0}^{\infty}\psi_i(x))]$$

Pruebe que existen conjuntos finitos no vacíos de índices $I_0, J_0 \subset \mathbb{N}$ tales que

$$T \models \forall x[(\vee_{i\in I_0}\phi_i(x)) \leftrightarrow (\wedge_{i\in J_0}\psi_i(x))]$$

II. Suponga que una teoría T es completa y recursiva, pero no necesariamente cerrada bajo deducciones. Pruebe que el conjunto de teoremas que se deducen de T es un conjunto recursivo.

III. Sea T una teoría completa con modelos infinitos y sea $M \models T$ $\aleph_0$-saturado. Suponga que M es *minimal*, es decir, que para todo $A \subset M$ definible con parámetros en M, A es finito o cofinito. Pruebe que T es *fuertemente minimal*, es decir, para todo $N \models T$ y $B \subset N$ definible con parámetros en N, B es finito o cofinito.

IV. Sea $\mathbb{L} = \{E\}$, donde E es un símbolo de relación binaria. Sea T la teoría que dice que E es una relación de equivalencia tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, E tiene exactamente una clase de equivalencia con n elementos.

1. Encuentre un modelo primo para T.
2. Clasifique los modelos contables de T.
3. Encuentre un tipo $p(x)$ que no es principal.
4. Pruebe que T no tiene eliminación de cuantificadores.

V. Sea $\langle C_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ una sucesión de subconjuntos cerrados no acotados de ω_1. Muestre que el conjunto

$$D = \left\{ \beta \in \omega_1 : \beta \in \bigcap_{\alpha < \beta} C_\alpha \right\}$$

es cerrado y no acotado.

VI. Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ no enumerable.

1. Pruebe que si I es un intervalo tal que $X \cap I$ es no enumerable entonces existe $x \in X$ tal que $X \cap I \cap (-\infty, x)$ y $X \cap I \cap (x, +\infty)$ son ambos no enumerables.
2. Demuestre que existe un subconjunto $Y \subseteq X$ tal que $(Y, \leq)$ es isomorfo a $(\mathbb{Q}, \leq)$.