

Examen de área
Lógica 2018-I

1. Sea T una teoría consistente en un vocabulario \mathbb{L} . Suponga que existen fórmulas $\{\phi_i(x)\}_{i \in \mathbb{N}}$, $\{\psi_i(x)\}_{i \in \mathbb{N}}$ en la variable x tales que

$$T \models \forall x[(\bigvee_{i=0}^{\infty} \phi_i(x)) \leftrightarrow (\bigwedge_{i=0}^{\infty} \psi_i(x))]$$

Pruebe que existen conjuntos finitos no vacíos de índices $I_0, J_0 \subset \mathbb{N}$ tales que

$$T \models \forall x[(\bigvee_{i \in I_0} \phi_i(x)) \leftrightarrow (\bigwedge_{i \in J_0} \psi_i(x))]$$

2. Suponga que una teoría T es completa y recursiva, pero no necesariamente cerrada bajo deducciones. Pruebe que el conjunto de teoremas que se deducen de T es un conjunto recursivo.
3. Sea T una teoría completa con modelos infinitos y sea $M \models T$ \aleph_0 -saturado. Suponga que M es *minimal*, es decir, que para todo $A \subset M$ definible con parámetros en M , A es finito o cofinito. Pruebe que T es *fuertemente minimal*, es decir, para todo $N \models T$ y $B \subset N$ definible con parámetros en N , B es finito o cofinito.
4. Sea $\mathbb{L} = \{E\}$, donde E es un símbolo de relación binaria. Sea T la teoría que dice que E es una relación de equivalencia tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, E tiene exactamente una clase de equivalencia con n elementos.
- (a) Encuentre un modelo primo para T .
 - (b) Clasifique los modelos contables de T .
 - (c) Encuentre un tipo $p(x)$ que no es principal.
 - (d) Pruebe que T no tiene eliminación de cuantificadores.
5. Sea $\langle C_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ una sucesión de subconjuntos cerrados no acotados de ω_1 . Muestre que el conjunto

$$D = \left\{ \beta \in \omega_1 : \beta \in \bigcap_{\alpha < \beta} C_\alpha \right\}$$

es cerrado y no acotado.

6. Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ no enumerable.
- (a) Pruebe que si I es un intervalo tal que $X \cap I$ es no enumerable entonces existe $x \in X$ tal que $X \cap I \cap (-\infty, x)$ y $X \cap I \cap (x, +\infty)$ son ambos no enumerables.
 - (b) Demuestre que existe un subconjunto $Y \subseteq X$ tal que (Y, \leq) es isomorfo a (\mathbb{Q}, \leq) .