Universidad de los Andes — Departamento de Matematicas

Examen de área en Lógica, 2017-II

Tiempo: 3 horas

1. Muestre que son equivalentes para una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ con grafo $G(f) \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

   a) f es recursiva

   b) $G(f)$ es un conjunto recursivo.

   c) $G(f)$ es un conjunto recursivamente enumerable.

2. Pruebe la siguiente versión del teorema de Ryll-Nardzewski. Sea T una teoría completa con modelos infinitos. Entonces las siguiente condiciones son equivalentes:

   (a) Para todo $n \geq 1$, el espacio $S_n(T)$ is finito.

   (b) Para todo $n \geq 1$ y todo $p \in S_n(T)$, p es aislado.

   (c) Para cada n sólo hay finitas fórmulas en n-variables módulo T.

   (d) T tiene un modelo primo saturado.

   Encuentre una teoría que no es ω-categórica pero para la cual $S_1(T)$ is finito.

3. Una estructura M es $\aleph_0$-homogenea si para todo $n \geq 1$ y todas tuplas $(a_1, \ldots, a_n) \in M^n$, $(b_1, \ldots, b_n) \in M^n$ si $\mathrm{tp}(a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{tp}(b_1, \ldots, b_n)$ entonces existe un automorfismo h de M tal que $h(a_1) = b_1, \ldots, h(a_n) = b_n$.

   (a) Pruebe que si M y N son modelos enumerables $\aleph_0$-homogéneos, M se sumerge de manera elemental como subestructura de N y N se sumerge de manera elemental como subestructura de M, entonces M y N son isomorfos.

   (b) Suponga que T es una teoría completa enumerable y N es un modelo primo de T. Pruebe que N es $\aleph_0$-homogéneo.

4. a) Muestre que en $\mathbb{N}$ existen $2^{\aleph_0}$ órdenes totales no isomorfos entre si.

   b) ¿Cuántos buenos órdenes no isomorfos hay en $\mathbb{N}$?

   c) Muestre que existe una familia de $2^{\aleph_0}$ subconjuntos de $\mathbb{N}$ totalmente ordenada por inclusión.

5. Dado un cardinal no enumerable κ sea $H_\kappa = \{x : |TC(x)| < \kappa\}$, en donde $TC(x)$ denota la clausura transitiva de x. Demuestre:

   (a) H_κ satisface los axiomas de extensionalidad, separación, pares, infinito, uniones y elección de ZFC (se asume elección en el universo).

   (b) Si κ es regular entonces H_κ satisface el axioma reemplazo.

   (c) Si κ es límite fuerte (i.e. $\lambda < \kappa$ implica $2^\lambda < \kappa$) entonces H_κ satisface el axioma de partes.

   (d) Si ZFC es consistente, entonces existe un modelo de ZFC en donde no hay cardinales fuertemente inaccesibles.

(Recuerde que fuertemente inaccesible = regular + límite fuerte)