Departamento de Matemáticas – Universidad de los Andes

Examen de Conocimientos en Álgebra

Mayo 12 de 2016

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Marque todas las hojas con su nombre completo.
Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.
Tiempo máximo: 180 minutos.

(**1.**) Sea n un entero positivo y sean $v_1, ..., v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$.

Sea $\Phi_{v_1,...,v_{n-1}}$ función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ que toma un vector v y lo envia en el determinante de la matriz cuyas primeras $n-1$ columnas están dadas por los vectores v_i y la última columna es el vector v. Explicitamente:

$$\begin{aligned} \Phi_{v_1,...,v_{n-1}} : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto \det[v_1|...|v_{n-1}|v]. \end{aligned}$$

(a) Muestre que $\Phi_{v_1,...,v_{n-1}} \in (\mathbb{R}^n)^*$.

(b) Muestre que $\Phi_{v_1,...,v_{n-1}} \equiv 0$ si y sólo si $\{v_1, ..., v_{n-1}\}$ es un conjunto linealmente dependiente.

(c) Sean $e_1, ..., e_{n-1}$ los primeros $n-1$ vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y sea $x \in \mathbb{R}^n$ con coordenas x_i para $i = 1, ..., n$. Calcule $\Phi_{e_1,...,e_{n-1}}(x)$.

(d) Muestre que para toda escogencia $v_1, ..., v_{n-1}$ existe un único $v_n \in \mathbb{R}^n$ tal que para todo $v \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\Phi_{v_1,...,v_{n-1}}(v) = v_n^t \cdot v.$$

(e) Dados $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ ¿qué es v_3?

(**2.**) Sea $n > 1$ un entero positivo y sea S_n el grupo simétrico en n-símbolos. Sea $Q_8 := \langle i, j \mid i^4, i^2 = j^2, j^{-1}ij = i^{-1} \rangle$ el grupo de los cuaterniones.

(a) Encuentre la probabilidad de que dos elementos escogidos al azar en S_3 conmuten.

(b) Encuentre la probabilidad de que dos elementos escogidos al azar en Q_8 conmuten.

(c) Sea G un grupo finito y sea $k(G)$ su número de clases de conjugación. Encuentre en términos de $k(G)$ y de $\#G$ la probabilidad de que dos elementos escogidos al azar en G conmuten.

(**3.**) (a) Encuentre todos los grupos finitos G, módulo isomorfismo, tales que su tabla de caracteres es la siguiente:

G				
	1	1	1	1
	1	1	-1	-1
	1	-1	1	-1
	1	-1	-1	1

(b) Sea $D_8 \cong \langle r, s |\ r^4, s^2, srs^{-1} = r^{-1}\rangle$ el grupo de simetrías del cuadrado. Dibuje la tabla de caracteres de D_8. *Sugerencia: Identifique el grupo* $D_8/[D_8, D_8]$.

(c) Si H y G son dos grupos finitos tales que sus tablas de caracteres son iguales, ¿son H y G isomorfos? Justifique su respuesta.

(**4.**) Sea R un anillo conmutativo con identidad y sea N un R-módulo finitamente generado.

(a) Sean $x_1, ..., x_m \in N$ y suponga que existen $r_1, ..., r_n$ en R tales que $\sum_{i=1}^{m} r_i x_i = 0$. Muestre que si N es plano entonces existen $\mu_1, ..., \mu_n \in N$ y $b_{ij} \in R$ tales[1] que

$$\sum_{i=1}^{m} r_i b_{ij} = 0 \text{ y que } x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\mu_j \text{ para todos } i, j.$$

Sugerencia: Denote por $r := (r_1, ..., r_m)$ y sea $\phi_r : R^m \to R$ el producto punto usual por r. Aplique $N \otimes_R$ _ a la secuencia exacta $0 \to Ker(\phi_r) \to R^m \xrightarrow{\phi_r} R$.

(b) Suponga que R es local con ideal maximal $\mathcal{M}$. Sean $x_1, ..., x_m \in N$ tales que sus imágenes en $N/\mathcal{M}N$ son $R/\mathcal{M}$ linealmente independientes. Muestre que si N es plano entonces los elementos $x_1, ..., x_m$ son R-linealmente independientes.

(c) Suponga que R es local con ideal maximal $\mathcal{M}$. Muestre que si N es plano entonces es libre.

(d) Muestre N es plano si y sólo si es localmente libre i.e., muestre que las siguientes son equivalentes:

(i) N es plano.

(ii) $N_{\mathcal{P}}$ es libre para todo $\mathcal{P} \in \mathrm{Spec}(R)$.

(iii) $N_{\mathcal{M}}$ es libre para todo $\mathcal{M} \in \mathrm{Max}(R)$.

[1] $(i, j) \in [1, ..., m] \times [1, ..., n]$

(**5.**) Para cada uno de los siguientes cuerpos K y grupos G encuentre, si es posible, una extensión de Galois L/K tal que $\mathrm{Gal}(L/K) \cong G$. En caso que no sea posible explique el porqué.

(a) $K = \mathbb{Q}$ y $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(b) $K = \mathbb{F}_2$, el cuerpo de dos elementos, y $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(c) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ y $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.