Examen de conocimiento 2015-1
Lógica

Tiempo: 3 horas
(resuelva 6 ejercicios)

1. a) Escriba los axiomas para la teoría TC_0 de campos de característica 0 y demuestre lo siguiente: si una sentencia φ vale en todos los campos de característica 0, entonces existe $p \in \omega$ tal que φ vale en todos los campos de característica $q \geq p$.

   b) Muestre que existe un función $f : \{\ulcorner\varphi\urcorner : TC_0 \vdash \varphi\} \to \mathbb{N}$ cuyo grafo es recursivamente enumerable y tal que $p = f(\ulcorner\varphi\urcorner)$ tiene la propiedad para φ indicada en (a). Puede usar la tesis de Church.

2. Sea TN la teoría de números de primer orden. El teorema de incompletitud de Gödel dice que toda extensión consistente y recursivamente axiomatizable de TN es incompleta. Utilice lo anterior para demostrar que T tiene $2^{\aleph_0}$ extensiones consistentes completas distintas.

3. Sea T una teoría enumerable, consistente y completa. Mostrar:

   a) Si $|S_n(T)| \leq \aleph_0$ para todo n. entonces T tiene un modelo primo

   b) T tiene un modelo saturado enumerable si y solo si $|S_n(T)| \leq \aleph_0$ para todo n.

4. Muestre que un modelo es κ-saturado si y solamente si es κ^+-universal y κ-homogéneo. (A es κ^+-*universal* si todo $B \equiv A$ de cardinal $\leq \kappa$ se puede sumergir elementalmente en A, es κ-*homogéneo* si toda sumersión elemental $f : B \to A$ con $B \leq A$, $|B| < \kappa$ puede extenderse a $B \cup \{a\}$ para cualquier $a \in A$.)

5. Sea T una teoría completa ω-estable. Muestre que es κ-estable para todo cardinal $\kappa \geq \omega$.

6. Demuestre el principio de buen orden a partir del axioma de elección.

7. a) Demuestre que para la exponenciación cardinal vale: $(\kappa^{\delta})^{\mu} = \kappa^{\delta\mu}$.

   b) Demuestre que para la exponenciación ordinal vale: $(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta\gamma}$.

   c) De un ejemplo de una ley que valga para exponenciación cardinal pero no para exponenciación ordinal.