Universidad de los Andes **Departamento de Matemáticas**

Examen de Área de Lógica 2014-2

Tiempo: 3 horas

1. Sea T una teoría enumerable completa y $\Sigma_n(x)$ una familia de tipos en el lenguaje de T. Demuestre:

   a) Si cada $\Sigma_n(x)$, $n \in \omega$, es realizado en algún modelo de T entonces todos los $\Sigma_n(x)$ son simultáneamente realizados en un modelo de T.

   b) Si cada $\Sigma_n(x)$, $n \in \omega$, es omitido en algún modelo de T entonces todos los $\Sigma_n(x)$ son simultáneamente omitidos en un modelo de T.

2. Sea $L = \{<\}$, sea $T = Th((Z, <))$.

   a) Pruebe que T no tiene eliminación de cuantificadores.

   b) Sea $S(x)$ la función sucesor, pruebe que T tiene eliminación de cuantificadores en el vocabulario $L = \{<, S\}$.

   c) Sea $M \models T$ y $A \subset M$. Pruebe que existe un modelo primo para la teoría de M con constantes para los elementos de A.

   d) Halle $M \models T$ contable y $A \subset M$ contable tal que $|S_n(A)| = 2^{\aleph_0}$.

3. Se puede probar que toda teoría enumerable con modelos infinitos tiene en cada cardinalidad κ un modelo que solamente realiza enumerables tipos sobre cada subconjunto enumerable (no se pide la demostración de este hecho).

   a) Utilizando lo anterior deduzca que una teoría enumerable κ categórica para $\kappa \geq \omega_1$ es ω-estable.

   b) Muestre que una tal teoría debe tener modelo primo.

4. a) Muestre que $Th(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ es decidible.

   b) Muestre que $Th(\mathbb{C}, +, \cdot, \exp, 0, 1)$ es indecidible.

5. a) Sea $(A, <)$ un conjunto bien ordenado y $f : (A, <) \to (A, <)$ una función que cumple: $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. Demuestre: $x \leq f(x)$ para toda $x \in A$.

   b) Muestre que entre dos conjuntos bien ordenados existe a lo sumo un isomorfismo.

   c) Muestre que dados dos conjuntos bien ordenados uno de ellos debe ser isomorfo a un único segmento inicial (no necesariamente propio) del otro.

6. a) La familia $Borel$ es la intersección de todas las familias de subconjuntos de $\mathbb{R}$ que contienen los intervalos abiertos y son cerradas bajo complementos e intersecciones enumerables. Defina:

$B_0 = \{S : S \text{ intervalo abierto en } \mathbb{R}\}$

$B_{\alpha+1} = \{S^c : S \in B_\alpha\} \cup \{\cap_n S_n : S_n \in B_\alpha\}$

$B_\alpha = \cup_{\beta<\alpha} B_\beta$ si α es ordinal límite,

y demuestre: $|B_\alpha| = 2^\omega$ y $B_\alpha \subseteq Borel$ para todo ordinal $\alpha \leq \omega_1$; $B_{\omega_1} = Borel$.

b) Demuestre que el número de subconjuntos Lebesgue-medibles de $\mathbb{R}$ es 2^{2^ω}.