Exámen de área
Lógica
Diciembre 1 de 2011

1. Suponga que $A, B \subseteq \mathbb{N}$ son conjuntos recursivamente enumerables tales que $A \cup B$ y $A \cap B$ son recursivos. Muestre que A y B son recursivos.

2. Un orden lineal es *disperso* si no contiene un suborden isomorfo a los racionales. Muestre que la clase de todos los ordenes lineales dispersos no es axiomatizable en la lógica de primer orden.

3. Sean A y B conjuntos de reales positivos que están bien ordenados por el orden usual de los reales. Para cada uno de los siguientes conjuntos, pruebe que es un buen orden o de un ejemplo mostrando que podría no serlo, según sea el caso:
   (a) $A + B = \{a + b : a \in A \text{ y } b \in B\}$,
   (b) $A \cdot B = \{a \cdot b : a \in A \text{ y } b \in B\}$,
   (c) $A^B = \{a^b : a \in A \text{ y } b \in B\}$,
   (d) $A/B = \{a/b : a \in A \text{ y } b \in B\}$.

4. Muestre que la estructura $(\mathbb{Z}, +)$ **no** es elementalmente equivalente a un ultraproducto de grupos finitos con órdenes impares.

5. Considere el orden parcial sobre $\omega \times \omega_1$ definido por:
$$(n, \alpha) \leq (m, \beta) \Longleftrightarrow n \leq m \text{ y } \alpha \leq \beta.$$
   Muestre que no existen un ordinal λ y una función $f : \lambda \to \omega \times \omega_1$ tales que f sea creciente $(\forall \xi_1, \xi_2 \in \lambda[\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f(\xi_1) < f(\xi_2)])$ y cofinal $(\forall x \in \omega \times \omega_1 \exists \xi \in \lambda[f(\xi) > x])$.

6. Sea $L = \{P\}$ donde P es un símbolo de predicado unario. Muestre que si una L-sentencia tiene modelos, entonces tiene modelos finitos.

7. Sea $L = \{R\}$ donde R es un símbolo de predicado binario y sea T la L-teoría de todos los órdenes lineales *discretos sin extremos*. (Esto queire decir que si $\mathfrak{A} \models T$, entonces cada $a \in A$ tiene un predecesor $b \in A$ tal que $R^{\mathfrak{A}}(b, a)$ pero no hay $d \in A$ tal que $R^{\mathfrak{A}}(b, d)$ y $R^{\mathfrak{A}}(d, a)$, y también tiene un sucesor $c \in A$ tal que $R^{\mathfrak{A}}(a, c)$ pero no hay $e \in A$ tal que $R^{\mathfrak{A}}(a, e)$ y $R^{\mathfrak{A}}(e, c)$.)
   Demuestre que T tiene $2^{\aleph_0}$ modelos enumerables no isomorfos.