Examen de área (lógica)
Mayo de 2011

May 19, 2011

1. (a) Demuestre que no hay un "mínimo conjunto no recursivo": es decir, para todo $A \subseteq \mathbb{N}$ que no sea recursivo, existe un subconjunto $B \subseteq A$ tal que $B \neq A$ y B tampoco es recursivo.

(b) Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{N}$ tales que ambos son recursivamente enumerables, ninguno es recursivo, y $A \cap B = \emptyset$. Demuestre que $A \cup B$ tampoco es recursivo.

2. Sea $T = \mathrm{Th}(\mathbb{N}; +, \cdot)$. Demuestre que hay un número **no contable** de modelos contables de T salvo isomorfismo.

3. Consideramos un grafo G como una estructura en el lenguaje $\{R\}$ con una relación binaria, donde el universo es el conjunto de vértices y $R(a, b)$ es interpretado como la relación "hay una arista entre a y b."

Demuestre que la clase de todos los grafos conexos no es axiomatizable por la lógica de primer orden. (Un grafo se dice *conexo* si para cualquier par de vértices a y b, existe una sucesión finita de vértices adyacentes de la cual el primer elemento es a y el último es b.)

4. Suponga que $L \subseteq L'$ son dos lenguajes contables y que $L' \setminus L$ consta de un número **finito** de símbolos de constante, y suponga que $T \subseteq T'$ son teorías completas en los lenguajes L y L' respectivamente. Demuestre que T es $\aleph_0$-categórica si y sólo si T' lo es.

5. Sea T la teoría basada en el símbolo de función unaria S con los siguientes axiomas:

$$\forall x \exists y (S(y) = x)$$

$$\forall x \forall y (S(x) = S(y) \rightarrow x = y)$$

y para cada $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, hay un axioma en T de la forma

$$\forall x (S^n(x) \neq x)$$

(donde S^n denota la aplicacíon de S n veces).
Demuestre que T es completa.

6. Dada una función $f : \omega_1 \rightarrow \omega_1$ definimos

$$C_f = \{\alpha \in \omega_1 : \forall \beta < \alpha \ \ f(\beta) < \alpha\}.$$

a) Muestre que C_f es cerrado y no acotado (club) en ω_1.

b) Muestre que para todo club $C \subseteq \omega_1$ existe f tal que $C_f \subseteq C$.

7. Muestre que $\kappa < \kappa^{cf(\kappa)}$ para cualquier κ cardinal infinito (aquí $cf(\kappa)$ denota la cofinalidad de κ).