Exámen de área
Lógica
Diciembre 2 de 2010

1. Demuestre que $P(x)$: "x es primo", es una relación primitivamente recursiva y que la función $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $p(n) = (n+1)$ - ésimo primo es primitivamente recursiva.

2. Demostrar el teorema de Löwenheim-Skolem ascendente: Sea T una L-teoría que posee modelos infinitos. Entonces T posee modelos infinitos arbitrariamente grandes: e.d. para todo cardinal κ, mayor o igual que la cardinalidad de L, T posee modelos de cardinalidad mayor o igual que κ.

3. Demuestre que para cada par de números reales distintos r y s se puede dar una fórmula $\phi(x)$, tal que en la estructúra $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, <)$ vale $\phi[r]$, pero no vale $\phi[s]$. Concluir de lo anterior que el único automorfismo de $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, <)$ es la identidad.

4. Sea $\mathcal{L} = \{+, -, \times, 0, 1, <\}$ el vocabulario de anillos con un símbolo de orden. Sea $\mathcal{M} = (\mathbb{Q}, +, -, \times, 0, 1, <)$.
   (a) Construya un modelo $\mathcal{A}$ de la teoría de $\mathcal{M}$ y un elemento a en $\mathcal{A}$ que tenga el mismo corte de Dedekind que $\sqrt{2}$. Es decir, un elemento a tal que para cada racional p, $\sqrt{2} > p$ si y solo si $a > p$.
   (b) Pruebe que en $\mathcal{A}$ no existe un elemento a tal que $a^2 = 2$.
   (c) Construya un modelo $\mathcal{A}$ de la teoría de $\mathcal{M}$ que no sea arquimediano, es decir, pruebe la existencia de dos elementos positivos $a, b \in \mathcal{A}$ tales que $na < b$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

5. Considere la estructura $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, +, \times)$ y su reducto $\mathcal{B} = (\mathbb{Z}, +)$, donde $+$ y $\times$ son las operaciones usuales de suma y multiplicación. Un elemento a del universo M en un vocabulario $\mathcal{L}$ se dice $\emptyset$-definible si existe una $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x)$ tal que a es el único elemento b del universo de M tal que $M \models \varphi[b]$.
   (a) Cuáles elementos de $\mathbb{Z}$ son definibles en $\mathcal{A}$?
   (b) Cuáles elementos de $\mathbb{Z}$ son definibles en $\mathcal{B}$?

6. Sea κ un cardinal infinito y para cada $\alpha \in \kappa$ sea A_α un conjunto de cardinalidad κ. Muestre que existe un conjunto B que intersecta a todos los A_α's pero no contiene a ninguno de ellos.

7. Sea f una permutación de ω_1 (i.e. $f : \omega_1 \to \omega_1$ es biyectiva). Pruebe que para todo $\alpha \in \omega_1$ existe $\beta \in \omega_1$ tal que $\beta > \alpha$ y $f \restriction \beta$ es una permutación de β.