Examen de Area
Lógica
Diciembre 4 de 2009

1. Sea $A \subseteq \mathbb{N}$. Demuestre que A es recursivamente enumerable si y solo si es el dominio de alguna función parcial recursiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

2. Suponga que M es un modelo enumerable de ZFC. Demuestre que existe un modelo enumerable de ZFC que no es isomorfo a M.

3. Demuestre que si α, β, γ son ordinales, entonces $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)$. ¿Vale la otra ley distributiva?

4. Para este ejercicio trabaje en ZFC.

   (a) Demuestre que si κ es un cardinal infinito y λ es un cardinal cualquiera tal que $\lambda \leq \kappa$, entonces $\lambda^\kappa = 2^\kappa$.

   (b) Asuma la hipótesis del continuo y considere el lenguaje de primer orden basado en el simbolo de relación binaria R. Sea T la teoría que dice que R es una relación de equivalencia. Demuestre que módulo isomorfismo hay exactamente $\aleph_1$ modelos de T de orden a lo sumo $\aleph_1$.

5. Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje de primer orden basado en el símbolo de relación binaria $<$ y los símbolos de relación mónica P, Q. Sea T la teoria consistente de los axiomas de órdenes lineales densos más las cuatro fórmulas:

$$\exists xy(P(x) \wedge Q(y) \wedge \forall w(x \leq w \leq y))$$
$$\forall xy \exists wz(x < z < w < y \wedge P(z) \wedge Q(w))$$
$$\forall x(P(x) \vee Q(x))$$
$$\forall x(P(x) \leftrightarrow \neg Q(x)).$$

   Demuestre que T es completa.

6. Suponga que $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son modelos elementalmente equivalentes de algún lenguaje de primer orden. Demuestre que existe un tercer modelo $\mathcal{A}$ que es extensión elemental de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$.

7. Sea T una teoría completa en un lenguaje enumerable de primer orden. Sea $\mathcal{M}$ un modelo enumerable de T. Demuestre que $\mathcal{M}$ es primo si y solo si es atómico.