Exámen de Area
Lógica
Junio 17 de 2009
Escoja 6 de los 7 problemas

1. Sea $A \subseteq \mathbb{N}$. Muestre que A es finito si y sólo si todo subconjunto de A es recursivamente enumerable.

2. Sea T una teoría que admite infinitas completaciones diferentes. Muestre que alguna completación de T no es finitamente axiomatizable.

3. Sea $\mathbb{B} = (B; \wedge, \vee, \neg, U)$, donde $(B; \wedge, \vee, \neg)$ es un álgebra booleana no atómica y $U \subseteq B$ es un ultrafiltro. Muestre que la teoría de $\mathbb{B}$ es decidible.

   Ayuda: Dé una axiomatización explícita para la teoría de álgebras booleanas no atómicas con un ultrafiltro y pruebe que ésta teoría es ω-categórica.

4. Sea K un campo de característica 0 y sea $\mathbb{V} = (V; +, 0, f_\lambda)_{\lambda \in K}$ un espacio vectorial sobre K (donde para cada $\lambda \in K$, $f_\lambda : V \to V$ es multiplicación escalar por λ). Muestre que la teoría de $\mathbb{V}$ admite eliminación de cuantificadores.

5. Para cada $n \in \omega$ sea $f_n : \omega_1 \to \omega_1$ una función creciente ($\alpha < \beta \Rightarrow f_n(\alpha) < f_n(\beta)$) y continua ($f_n(\lambda) = sup\{f_n(\alpha) : \alpha \in \lambda\}$ para λ ordinal límite). Muestre que existe $\alpha \in \omega_1$ tal que $f_m(\alpha) = f_n(\alpha)$ para cualesquiera $m, n \in \omega$.

6. Suponga que para cada $n \in \omega$, A_n es un subconjunto del ordinal $(\omega_1)^2$ y suponga que $(\omega_1)^2 = \bigcup_{n \in \omega} A_n$. Muestre que algún A_n tiene tipo de orden $(\omega_1)^2$.

7. Demuestre en ZFC que existe $A \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $|A \cap L| = 2$ para toda recta $L \subseteq \mathbb{R}^2$.