Examen de Lógica

1. Demuestre que el conjunto $S = \{\varphi \mid \varphi \text{ es satisfacible}\}$ no es recursivamente enumerable. NOTA: los elementos de S son sentencias del lenguaje de la lógica de primer orden basado en un número contable de símbolos de constante, relación y función.

2. Sea $\{T_i\}$ una enumeración de las máquinas de Turing con una sóla entrada. Demuestre que no hay una máquina de Turing que decida si la n-ésima máquina de Turing $T_n(x)$ para para todo x.

3. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Demuestre que la clase de $\mathcal{L}$-estructuras infinitas no es finitamente axiomatizable.

4. Sea κ un cardinal infinito de cofinalidad mayor que ω y sea $*$ una operación de grupo en κ. Demuestre que el conjunto de los $\alpha \in \kappa$ tales que $(\alpha, *)$ es un subgrupo de $(\kappa, *)$ es un club (subconjunto cerrado y no acotado) de κ.

5. Sea A una clase de conjuntos tales que para todo conjunto x si $x \subset A$ entonces $x \in A$. Demuestre que $x \in A$ para todo x.

6. Sea

$$M_0 \prec M_1 \prec M_2 \prec \dots$$

una cadena elemental de longitud $\alpha \in Ord$, sea M la unión y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre α.

- Demuestre que M es una extensión elemental de M_0.
- Demuestre que para todo M_σ con $\sigma \in \alpha$, hay una inmersión natural de M_σ en el ultraproducto $\Pi_{\mathcal{U}} M_i$ (también conocido como $(\Pi_{\sigma\in\alpha} M_\sigma)/\mathcal{U}$).
- Demuestre que las inmersiones definidas en el punto anterior inducen una sumersión elemental de M en $\Pi_{\mathcal{U}} M_i$.

7. Demuestre que la teoría de

$$((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\omega}, +)$$

tiene eliminación de cuantificadores (en el lenguaje de grupos) y utilice esto para demostrar que es categórica en todo cardinal no enumerable.