Examen de Lógica

1. Recuerde que la clase de *funciones recursivas parciales* se define como la clase más pequeña de funciones que contiene a:

0	(la función constante 0)
$x+1$	(la función sucesor)
$U_i^n(x_1,\dots,x_n)=x_i$	(las funciones de proyección)

y que está cerradas bajo composición, recursión y minimalización:

Definición por recursión: $h(x_1,\dots,x_n,y)$ se define *recursivamente* a partir de $f(x_1,\dots,x_n)$ y $g(x_1,\dots,x_n,y,z)$ si
$h(x_1,\dots,x_n,0)=f(x_1,\dots,x_n)$ y
$h(x_1,\dots,x_n,m+1)=g(x_1,\dots,x_n,m,h(x_1,\dots,x_n,m))$

Definición por minimalización: para una función parcial $f(x_1,\dots,x_n,y)$ se define $\mu y f(x_1,\dots,x_n,y)=0$ como el menor y tal que para todo $z\leq y$ $f(x_1,\dots,x_n,z)$ está definido y $f(x_1,\dots,x_n,y)=0$. Si no existe tal y la función está indefinida.

Demuestre que las siguientes funciones son recursivas parciales:

a) 2^n

b) $\text{mín}\{n,m\}$

c) $res\{n,m\}$ (el residuo al dividir n entre m)

d) $\varphi(n)$ (el número de naturales menores de n que son primos relativos con n)

2. Sea L un vocabulario contable.

a) Pruebe que M es un modelo atómico de $T=Th(M)$ si y solo si para todo $Y\subset M$ finito, $M_Y=(M,y)_{y\in Y}$ es un modelo atómico de $T_Y=Th(M_Y)$.

b) Pruebe que T es $\aleph_0$-categórica si y solo si T_Y es $\aleph_0$-categórica.

3. Sea T una teoría.

a) Pruebe que T is axiomatizable por fórmulas de la forma $\forall\varphi$ con φ libre de cuantificadores si y solo si los modelos de T son cerrados bajo subestructuras (para cada $\mathcal{M}\models T$, si $N\subset M$, entonces $N\models T$).

b) Pruebe que, en particular, si T tiene funciones de Skolem entonces T tiene una axiomatización universal

c) Pruebe que DLO, ACF NO tienen axiomatizaciones universales. Aquí DLO es la teoría de órdenes lineales densos y ACF la teoría de campos algebraicamente cerrados.

4. Sea L el vocabulario $\{<, +, \times, 0, 1\}$ y sea $\mathcal{N}$ el modelo con universo $\mathbb{N}$ donde los símbolos tiene su interpretación estándar. Pruebe que existe una estructura $\mathcal{M}$ elementalmente equivalente a $\mathcal{N}$ que posee primos infinitos. Un primo infinito es un elemento a tal que $a > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que satisface

$$\forall b\, \forall c\, (a = bc \to (b = a \lor c = a)).$$

5. Pruebe las siguientes condiciones o encuentre un contraejemplo:

a) Para α, β, γ ordinales, $\alpha^{\beta}\alpha^{\gamma} = \alpha^{\beta+\gamma}$.

b) Para α, β, γ ordinales, $(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta\gamma}$.

c) Para α, β, γ ordinales, $(\alpha\beta)^{\gamma} = \alpha^{\gamma}\beta^{\gamma}$.

6. La suma *natural* de dos ordinales α, β escritos en forma normal de Cantor como

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & \omega^{\gamma_1}k_1 + \ldots \omega^{\gamma_n}k_n \\ \beta & = & \omega^{\gamma_1}l_1 + \ldots \omega^{\gamma_n}l_n \end{array}$$

donde $\gamma_1 > \ldots > \gamma_n$ son ordinales y los k_i, l_i son enteros no negativos, se define como

$$\alpha \oplus \beta = \omega^{\gamma_1}(k_1 + l_1) + \ldots \omega^{\gamma_n}(k_n + l_n).$$

a) Pruebe que $\alpha \oplus \beta \geq \alpha + \beta$.

b) Pruebe que la suma natural *NO* es continua por la derecha.