Departamento de Matemáticas Universidad de los Andes

Examen de Área de Magister y Doctorado
LÓGICA

Enero 17 de 2008

1. Sea $L = \{+, ^{-1}, e\}$ un vocabulario donde $+$ es un símbolo de función binaria, $^{-1}$ es un símbolo de función unaria, y e es un símbolo de constante. Pruebe que no existe una L-fórmula $\varphi(x, y)$ tal que para todo grupo G,

   $$G \models \varphi(a, b) \text{ si y solo si } a, b \text{ tienen el mismo orden.}$$

   (El orden de a es el menor natural $n \geq 1$ tal que $a^n = e$, o ∞ si n no existe.)

2. Una fórmula se dice existencial si es de la forma $\exists x_1 \ldots \exists x_n \varphi$, donde φ es una fórmula libre de cuantificadores. Suponga que toda fórmula de la forma $\forall y_1 \psi$, donde ψ es libre de cuantificadores, es equivalente, módulo cierta teoría Σ, a una fórmula existencial. Demuestre:

   (a) Toda fórmula es equivalente, módulo Σ, a una fórmula existencial.

   (b) Si $M, N \models \Sigma$ son tales que $M \subset N$, entonces $M \preceq N$.

3. Sea Σ la teoría axiomatizada por la sentencia $\forall x(P(x) \implies Q(x))$, junto con la familia infinita de sentencias $\exists x_1 \ldots \exists x_n(\bigwedge_{i \leq n} P(x_i) \wedge \bigwedge_{i<j\leq n} x_i \neq x_j)$ indexada por $n \geq 1$.

   (a) Pruebe que no existe una familia finita Δ de sentencias tal que $Th(\Sigma) = Th(\Delta)$.

   (b) Clasifique los modelos contables de Σ módulo isomorfismo.

   (c) Clasifique los modelos de Σ módulo equivalencia elemental (Ayuda: determine las extensiones completas de Σ.)

4. Sea T una teoría consistente enumerable que tiene a lo sumo enumerables modelos enumerables no isomorfos. Muestre que tiene un modelo atómico.

5. Demuestre (en ZFC) que si κ es un cardinal infinito, entonces $\kappa < \kappa^{cof(\kappa)}$.

6. Sea α un ordinal fijo. Demuestre que para cada ordinal β existe $\gamma \geq \beta$ tal que $\alpha \cdot \gamma = \gamma$.

7. Sean A y B subconjuntos de los naturales.

   (a) Muestre que si A, B son recursivamente enumerables entonces y $A \cup B$ y $A \cap B$ también lo son, pero $A - B$ no necesariamente lo es.

   (b) Suponga que A es infinito. Demuestre que A es recursivo si y sólo si $A = \emptyset$ ó $A = rango(f)$ para alguna función recursiva y creciente $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.