Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Recuerde apagar y guardar su teléfono celular. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.

Tiempo máximo para este examen: 2 horas y 50 minutos.

Nombre: ______________________ Código: ____________

Responda por lo menos cinco de las siguientes preguntas.

1. Considere la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$.

   i. Demuestre que $f^{-1}(0)$ es una subvariedad suave de $\mathbb{R}^3$ y calcule su dimensión.

   ii. Considere el campo vectorial $X = a\dfrac{\partial}{\partial x} + b\dfrac{\partial}{\partial y} + c\dfrac{\partial}{\partial z} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$. Encuentre valores para las constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ de tal forma que X sea tangente a la subvariedad $f^{-1}(0)$ en el punto $(1, 0, 1)$.

   iii. Considere los campos vectoriales en $\mathbb{R}^3$ dados por $Y = y\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial z}$ y $Z = \dfrac{\partial}{\partial y}$. Calcule el corchete de Lie $[X, Y]$ y demuestre que no existe una subvariedad suave $S \subset \mathbb{R}^3$ tal que las restricciones de Y y Z a S sea tangente a S en todos sus puntos.

   (5 puntos)

2. Sea $M_n(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de matrices $n \times n$ con entradas reales, $GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices invertibles y considere el subconjunto $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$.

   i. Pruebe que $D(\det)_I : T_I GL_n(\mathbb{R}) \to T_1\mathbb{R}$, la derivada de la aplicación determinante en la identidad, es sobre.

   ii. Pruebe que, para toda $A \in SL_n(\mathbb{R})$, la derivada de la aplicación determinante $D(\det)_A : T_A GL_n(\mathbb{R}) \to T_1\mathbb{R}$, es sobre.

   iii. Demuestre que $SL_n(\mathbb{R})$ es una subvariedad suave de $M_n(\mathbb{R})$ y encuentre su dimensión.

   (5 puntos)

3. Sea $f : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ una aplicación suave entre las esferas unitarias $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ y $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$.

   i. Demuestre que existe una 2-forma $\omega \in \Omega^2(\mathbb{S}^2)$ que satisface $\displaystyle\int_{\mathbb{S}^2} \omega = 1$.

   ii. Demuestre que existe una 1-forma $\eta \in \Omega^1(\mathbb{S}^3)$ que satisface $f^*\omega = d\eta$.

   iii. Sea $\tilde{\omega} \in \Omega^2(\mathbb{S}^2)$ otra 2-forma que satisface $\displaystyle\int_{\mathbb{S}^2} \tilde{\omega} = 1$. Demuestre que existe una 1-forma $\theta \in \Omega^1(\mathbb{S}^2)$ tal que $\tilde{\eta} := \eta + f^*\theta$ satisface $f^*\tilde{\omega} = d\tilde{\eta}$.

   iv. Demuestre que $\displaystyle\int_{\mathbb{S}^3} \eta \wedge d\eta = \int_{\mathbb{S}^3} \tilde{\eta} \wedge d\tilde{\eta}$.

   (5 puntos)

4. Sea G un grupo de Lie n-dimensional, y denotemos por $e \in G$ la identidad. Una forma diferencial $\theta \in \Omega^\bullet(G)$ es llamada *invariante a izquierda* si satisface $L_g^*\theta = \theta$ para todo $g \in G$, donde L_g denota la multiplicación a izquierda (por g) en el grupo.

   i. Demuestre que si $\alpha_o \in T_e^*G$ es un covector arbitrario, α_o puede extenderse en forma única a una 1-forma invariante a izquierda $\alpha \in \Omega^1(G)$.

   ii. Demuestre que existen n 1-formas $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^n \in \Omega^1(G)$ invariantes a izquierda y linealmente independientes (punto a punto) sobre G.

   iii. Demuestre que existen constantes c_{ij}^k tales que, para las 1-formas del enunciado anterior, se satisface $d\omega^k = \sum_{1\le i<j\le n} c_{ij}^k \, \omega^i \wedge \omega^j$.

   (5 puntos)

5. Sea X el plano proyectivo real. ¿Cuántas componentes conexas tiene el espacio $X \setminus A$ si:

   i. A es un punto?

   ii. A es una recta?

   iii. A es unión de dos rectas?

   ¿Es cierto que estas componentes son simplemente conexas? (5 puntos)

6. Sean $M = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$, $g = \dfrac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ y $G = dx^2 + x^2 dy^2$.

   i. ¿Las variedades riemannianas (M, g) y (M, G) son completas?

   ii. ¿Las variedades riemannianas (M, g) y (M, G) son isométricas?

   (5 puntos)

7. Responda *falso* o *verdadero*, justificando *matemáticamente* su respuesta.

   i. Existen un espacio topológico X y un camino $\gamma : [0, 1] \to X$, tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0 \in X$ y γ no es homótopo con extremos fijos al camino constante, pero el camino $\gamma \cdot \gamma$ sí es homótopo con extremos fijos al camino constante.

   ii. Existe un homeomorfismo entre la bola abierta en $\mathbb{R}^3$ y un cubo abierto en $\mathbb{R}^4$.

   iii. Existe un homeomorfismo $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ de grado par.

   iv. Si M es una variedad compacta y orientable, entonces el rango de $H_k(M)$ es igual al rango de $H_{n-k}(M)$.

   v. Cualquier variedad real bidimensional admite una estructura de variedad compleja unidimensional.

   (5 puntos)