Examen de conocimiento 2024-1

Problema 1. Sea $\omega \in \Omega^2(S^2)$ una forma de área. Mostrar que no existen formas $\alpha, \beta \in \Omega^1(S^2)$ tales que $\omega = \alpha \wedge \beta$.

Problema 2. Mostrar que cualquier variedad suave simplemente conexa es orientable.

Problema 3. Sea (X, d) un espacio métrico completo y $Y \subset X$ un subconjunto. Muestre que Y es cerrado en X si y solo si $(Y, d|_Y)$ es completo como espacio métrico.

Problema 4. Sea X un espacio topológico. Sean $B^2 = \{x \in \mathbf{R}^2 : |x| \leq 1\}$ y $S^1 = \partial B^2 = \{x \in \mathbf{R}^2 : |x| = 1\}$. Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. $\pi_1(X, p) = \{0\}$ para todo $p \in X$.
2. Todos los mapas continuos $s : S^1 \to X$ son homotópicos.
3. Cada mapa continuo $s : S^1 \to X$ se puede extender a un mapa continuo $\bar{s} : B^2 \to X$.

Problema 5. Sea X un espacio topológico y $Y \subset X$ un retracto de X, es decir, existe un mapa continuo $r : X \to X$ con $r(X) = Y$ y $r|_Y = \mathrm{id}_Y$. Sea $i : Y \hookrightarrow X$ el mapa de inclusión. Muestre que el mapa inducido $i_* : H_n(Y) \to H_n(X)$ es inyectivo para todo n.

Problema 6. Mostrar que el toro $S^1 \times S^1$ no es un retracto de la esfera S^2.