Responda **cinco** entre las seis preguntas siguientes.
Tiempo máximo para este examen: 2 **horas y** 50 **minutos.**

Nombre: ______________________________ Código: ______________

1. Sea $M = \mathbb{R}^3$ y considere la forma diferencial $\omega = xdy + dz \in \Omega^1(M)$.

   i. Calcule $d\omega$.
   ii. Calcule $\omega \wedge d\omega$ y demuestre que $\omega \wedge d\omega$ no se anula en ningún punto de M.
   iii. Encuentre un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\mathcal{L}_X(d\omega) = 0$.

   (10 puntos)

2. Sea x_0 un vector unitario en $\mathbb{R}^3$ y considere la aplicación $\phi : SO(3) \to \mathbb{S}^2$ dada por $\phi(A) = Ax_0$. Demuestre que existe una forma $\eta \in \Omega^1(SO(3))$ tal que $d\eta = \phi^*\omega$ donde $\omega \in \Omega^2(\mathbb{S}^2)$ es la forma de área de la esfera $\mathbb{S}^2$. (10 puntos)

3. Considere una forma cuadrática q no degenerada sobre $\mathbb{R}^3$.

   i. Pruebe que $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid q(x,x) = 1\}$ es vacío o es una subvariedad en $\mathbb{R}^3$.
   ii. Pruebe que $T_x\Sigma = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid q(x,v) = 0\}$.
   iii. ¿ Es Σ conexa?
   iv. ¿Es Σ simplemente conexa?
   v. ¿Es Σ compacta?
   vi. Encuentre la característica de Euler de Σ si es compacta.

   (10 puntos)

4. Sea M una variedad tridimensional.

   i. Pruebe que, si M es compacta y orientable, existe un campo vectorial suave sobre M que no se anula en ningún punto.
   ii. Pruebe que, si g es una estructura Riemanniana sobre M tal que su tensor de Ricci es igual al tensor métrico, entonces (M, g) tiene curvatura constante y calcule su valor.

   (10 puntos)

5. Considere $M = \mathbb{R}^2$ con la métrica Riemanniana $g = (1 + y^2)dx^2 + dy^2$. Encuentre la geodésica que pasa por el punto $p = (0, 0)$ con vector velocidad inicial $v = (0, 1)$. (10 puntos)

6. Considere el conjunto $\mathsf{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$ de matrices simétricas reales $n \times n$ y la aplicación
$$F : M_n(\mathbb{R}) \to \mathsf{S}_n(\mathbb{R})$$
definida como $F(A) = A^T A - I$.

   i. Demuestre que F es una aplicación suave y que la derivada de F en $B \in M_n(\mathbb{R})$ define la transformación lineal
   $$dF_B : M_n(\mathbb{R}) \to \mathsf{S}_n(\mathbb{R})$$
   dada por $dF_B(A) = B^T A + A^T B$.

   ii. Demuestre que dF_B es sobreyectiva en $F^{-1}(0)$, que $0 \in \mathsf{S}_n(\mathbb{R})$ es un valor regular de F y concluya que $\mathsf{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T A = I\}$ es una subvariedad de $M_n(\mathbb{R})$.

   iii. Demuestre que $\mathsf{O}_n(\mathbb{R})$ es un grupo de Lie, calcule su dimensión y encuentre se álgebra de Lie $\mathfrak{o}_n(\mathbb{R})$.

(10 puntos)