Examen de conocimiento del área "Geometría y topología" en 201910
Puntaje total: 32 puntos, la nota 5: 25 puntos

1 (2 puntos) Sean $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ y $A = \{(x,y,z) \mid |z| \leq 1/2\} \cap \mathbb{S}^2$. Probar que existe una función suave $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $1 \leq f(p) \leq 3$ para todos los $p \in \mathbb{S}^2$, $f(0,0,\pm 1) = 1$, y $f(a) = 2$ para todos los $a \in A$.

2 (4 puntos) Sea Σ_g la superficie compacta orientada sin frontera de género $g \geq 2$.

a) (2 puntos) Sea $M = \Sigma_g \setminus \{p_0\}$, donde $p_0 \in \Sigma_g$. Encontrar los grupos de homotopía $\pi_n(M)$ para $n \geq 1$.

b) (2 puntos) Encontrar el área de la superficie Σ_g con la métrica de curvatura constante $K = -1$.

3. (4 puntos) Sea $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y,z,w) = (x^2+y^2-z^2-w^2, x-z)$.

a) (2 puntos) Probar que existe una vecindad U del punto $p = (1,1,1,1)$ tal que $\Sigma = F^{-1}(0,0) \cap U$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^4$.

b) (1 punto) Hallar una base del espacio tangente $T_p\Sigma$.

c) (1 punto) ¿Es $F^{-1}(0,0)$ una subvariedad de $\mathbb{R}^4$?

4. (11 puntos)

Sea $\mathbb{C}P^n$ el espacio proyectivo complejo.

a) (1 punto) Construir un atlas de variedad suave sobre $\mathbb{C}P^n$.

b) (2 puntos) Encontrar los grupos de homología $H_k(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z})$, $k \geq 0$;

c) (3 puntos) Encontrar el anillo de cohomología $H^*(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z})$.

d) (2 puntos) Construir un atlas del haz tautológico sobre $\mathbb{C}P^n$.

e) (3 puntos) Probar que el haz tautológico sobre $\mathbb{C}P^n$ no es trivial.

5. (2 puntos). Consideremos el toro bidimensional con la métrica plana. Hallar formas diferenciales armónicas que representen las clases de cohomología de de Rham del toro.

6. (2 puntos) Encontrar la curvatura escalar de la variedad riemanniana (M,g), donde

$$M = \{(u^1,u^2,u^3\} \mid u^1 > 0, 0 < u^2 < 2\pi, -1 < u^3 < 1\},$$
$$g = du^1 \otimes du^1 + (u^1)^2 du^2 \otimes du^2 + du^3 \otimes du^3.$$

7. (3 puntos) Sean $V = (-x^2, x^1, -x^4, x^3, -x^6, x^5)$ un campo vectorial en $\mathbb{R}^6$ y S una esfera en $\mathbb{R}^6$ centrada en el origen.

a) (1 punto) Probar que existe un campo vectorial W i-relacionado con V, donde $i : S \to \mathbb{R}^6$ es el embebimiento.

b) (2 puntos) Sean g la métrica riemanniana sobre S inducida por la métrica euclidiana de $\mathbb{R}^6$, W el campo vectorial definido en a). Hallar la derivada de Lie $L_W g$.

8. (4 puntos)

Marque cada afirmación con Verdadero o Falso y explique porque.

a) (1 punto) Existe una submersión $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tal que la preimagen $F^{-1}(0,0)$ es difeomorfa al plano proyectivo real.

b) (1 punto) El espacio proyectivo real de dimensión par admite una estructura de variedad compleja.

c) (1 punto) Existen haces vectoriales ξ y η sobre una variedad M tal que ξ es un haz no trivial, η es un haz trivial y $\xi \oplus \eta$ es un haz trivial.

d) (1 punto) Si para dos campos vectoriales X y Y sobre una variedad M el corchete de Lie $[X,Y](p) = 0$ para todos los puntos $p \in M$, y un punto $p_0 \in M$ es cero aislado del campo Y, entonces $X(p_0) = 0$.