Examen de Conocimientos
en el área de geometría y topología 201820

Cada ejercicio vale 5 puntos. La nota del examen es el promedio de las mayores 5 notas de los ejercicios.

1. a) Sea $\pi_N : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la proyección estereográfica desde el polo norte. Calcule $\pi_N^* \left(dx^2 + dy^2\right)$.

   b) Considere la siguiente aplicación $\Psi : D^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, donde D^2 es el disco unitario con borde descrito en coordenadas polares (r, θ), y dada en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) de $\mathbb{R}^3$ por
$$\Psi\left(r, \theta\right) = \left(G(r), \theta, \int_0^r \sqrt{1 - \left(G'\left(\sigma\right)\right)^2}\, d\sigma\right).$$
   Muestre que la métrica inducida sobre el disco por Ψ viene dada por
$$g = dr^2 + (G(r))^2 d\theta^2.$$

2. Muestre que todas las estructuras diferenciables de $\mathbb{R}$ son difeomorfas.

3. Sea $\mathfrak{X}(\mathbb{S}^2)$ el álgebra de Lie de campos vectoriales sobre la esfera bidimensional $\mathbb{S}^2$. Sea ω la forma de área sobre $\mathbb{S}^2$.

   Un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^2)$ se llama simetría infinitesimal de ω si el flujo φ_t de X preserva ω, es decir $\varphi_t^* \omega = \omega$. Sea $\mathcal{I} \subset \mathfrak{X}(\mathbb{S}^2)$ el conjunto de simetrías infinitesimales de ω.

   a) Probar que $\mathcal{I} \subset \mathfrak{X}(\mathbb{S}^2)$ es un subespacio vectorial.
   b) Probar que $\mathcal{I} \subset \mathfrak{X}(\mathbb{S}^2)$ es un subálgebra de Lie.
   c) ¿Es la dimensión de $\mathcal{I}$ finita?

4. Hallar todas las dimensiones n tales que existe operador lineal $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, con $\mathrm{Ker}\,(A) = 0$ y con la siguiente propiedad: para cualquier vector $v \in \mathbb{R}^n$ el vector Av es ortogonal a v.

5. Sea (M, g) una variedad riemanniana. Una vecindad U de un punto se llama totalmente normal si para cualesquiera dos puntos $p, q \in U$ existe una única geodésica γ entre p y q tal que su longitud es igual a la distancia entre p y q inducida por la métrica g.

   a) Hallar una vecindad totalmente normal de un punto de la esfera bidimensional con la métrica estándar.

b) Hallar una vecindad totalmente normal de un punto del plano euclidiano.
c) Hallar una vecindad totalmente normal de un punto den el plano hiperbólico.
d) Hallar una vecindad totalmente normal de un punto del toro con la métrica plana.
e) Hallar una vecindad totalmente normal de un punto del plano proyectivo con la métrica estándar.

6. a) Hallar los números $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tales que
$$\Sigma = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = a,\ x^2+y^2-z^2 = b\}$$
sea una subvariedad en $\mathbb{R}^3$.

   b) ¿Cuál es la dimensión de Σ?
   c) Escoger un punto de Σ y hallar el espacio tangente en este punto.

7. Sea X un conjunto infinito con la topología de Zariski (un subconjunto $A \subset X$ es cerrado si y solo si A es finito o $A = X$). ¿Existe una biyección continua $f : X \to Y$ donde Y es un espacio topológico de Hausdorff?

8. a) Probar que el plano proyectivo real $\mathbb{R}P^2$ no es orientable.
   b) Probar que el plano proyectivo complejo $\mathbb{C}P^2$ es orientable.
   c) Hallar $H^2\mathbb{R}P^2$.
   d) Hallar $H^4\mathbb{C}P^2$.

9. Consideremos dos variedades complejas $M = \mathbb{C}/\{\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i\}$ y $N = \mathbb{C}/\{\mathbb{Z}+\sqrt{2}\mathbb{Z}i\}$.
   a) ¿Es verdadero que los espacios topológicos M y N son homeomorfos?
   b) ¿Es verdadero que M y N son biholomorfas?

10. Muestre que toda función continua F de $\mathbb{S}^{2n}$ (la esfera unitaria de dimensión $2n$) en sí misma cumple que para algún $x \in \mathbb{S}^{2n}$, $F(x) = x$ o $F(x) = -x$. Muestre que toda función continua del espacio proyectivo real $\mathbb{R}P^{2n}$ en sí mismo siempre tiene un punto fijo ¿Es esto último cierto para los espacios proyectivos $\mathbb{R}P^{2n-1}$?