**Departamento de Matemáticas – Universidad de los Andes**

Examen de Conocimientos en Geometría y Topología

Mayo 12 de 2016

| |
|---|
| Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Marque todas las hojas con su nombre completo.<br>Para obtener la nota máxima en el examen es suficiente dar una solución completa a cinco de los seis ejercicios propuestos. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.<br>**Tiempo máximo: 180 minutos**. |

(**1.**) Sea $\tau$ la topología de Zariski sobre el plano complejo $\mathbb{C}$, es decir un conjunto $X \subset \mathbb{C}$ es cerrado si y sólo si $X = \mathbb{C}$ ó $X$ es conjunto de ceros de un polinomio.

1. Probar que $(\mathbb{C}, \tau)$ es compacto.
2. Probar que $(\mathbb{C}, \tau)$ es conexo.
3. Cules son las aplicaciones continuas de $(\mathbb{C}, \tau)$ a $\mathbb{R}$ con la topología estándar?

(**2.**) Sea $M$ el conjunto de todas las rectas en el plano $\mathbb{R}^2$.

1. Probar que la aplicación $\varphi : M \to \mathbb{R}P^2$, $\varphi(l) = [A : B : C]$, donde la recta $l$ tiene la ecuación $Ax + By + C = 0$, es una biyección entre $M$ y un conjunto abierto en $\mathbb{R}P^2$. $\varphi$ induce una estructura de variedad suave sobre $M$.
2. Hallar los grupos de homotopía $\pi_n(M)$, $n \geq 0$, y los grupos de homología $H_n(M; k)$, $n \geq 0$, para $k = \mathbb{Z}$, $k = \mathbb{Z}_2$ y $k = \mathbb{R}$.
3. Existe una estructura de variedad compleja sobre $M$?

(**3.**)

1. Hallar la característica de Euler de la esfera 2-dimensional.
2. Hallar la característica de Euler de la esfera 3-dimensional.
3. Existe una aplicación diferenciable $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tal que para cualquier $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ su imagen $f(x)$ es ortogonal a $x$?
4. Existe una aplicación diferenciable $f : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ tal que para cualquier $x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ su imagen $f(x)$ es ortogonal a $x$?

(**4.**) Evaluar la integral

$$\int_M (x^2 + y)dx \wedge dz + (x - y^2)dy \wedge dz + (z + y^2)dx \wedge dy,$$

donde $M$ es la superficie en $\mathbb{R}^3$ dada por la ecuación $x^2 + 4y^2 + 16z^2 = 16$.

**(5.)** Sea $g = du^1 \otimes du^1 - du^2 \otimes du^2$ una métrica pseudo-Riemanniana sobre $\mathbb{R}^2$.

1. Hallar las simetrías infinitesimales de la métrica $g$, es decir los campos vectoriales tales que $\mathcal{L}_X g = 0$.
2. Probar que los simetrías diferenciales de la métrica $g$ forman un subálgebra de Lie de dimensión finita de álgebra de Lie de campos vectoriales sobre $\mathbb{R}^2$. Cuál es la dimensión de esta subálgebra?
3. Hallar el grupo de isometrías de la métrica $g$, es decir los difeomorfismos $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tales que $\varphi^* g = g$. Cuál es la dimensión de este grupo?
4. Sea $\omega = du^1 \wedge du^2$ la forma del área sobre $\mathbb{R}^2$. Hallar las simetrías infinitesimales de la forma $\omega$, es decir los campos vectoriales tales que $\mathcal{L}_X \omega = 0$. Qué podemos decir sobre la dimensión del grupo de simetrías de esta forma?

**(6.)** El grupo $\mathbb{Z}^2$ actúa libremente sobre el plano complejo $\mathbb{C}$ en la siguiente manera: $R_{(m,n)}(z) = z + m + in$, para $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$.

1. Probar que $M = \mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$ admite una única estructura de variedad compleja tal que la proyección $\pi : \mathbb{C} \to M = \mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$ es la aplicación localmente biholomorfa.
2. Probar que $M = \mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$ admite una única métrica Riemanniana $g$ tal que la proyección $\pi : (\mathbb{C}, G) \to (M, g)$ es una isometría local, donde $G = dz \otimes d\bar{z}$ es la métrica estándar sobre $\mathbb{C}$.
3. Probar que si $f : U \subset M \to \mathbb{C}$, donde $U$ es un subconjunto abierto, es una función holomorfa con respecto a la estructura de variedad compleja sobre $M$, entonces la función $f$ es armónica, es decir $\Delta f = 0$, donde $\Delta$ es el operador de Laplace de la métrica $g$.
4. Hallar todas las funciones holomorfas $f : M \to \mathbb{C}$ definidas sobre todo $M$.