Departamento de Matemáticas
Universidad de los Andes

Examen de Área: Geometría y Topología

Noviembre de 2015

Para obtener la nota máxima en el examen es suficiente dar una solución completa a **cinco** de los seis ejercicios propuestos.
Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.

1. Decimos que una función continua entre espacios topológicos $f : X \to Y$ es *propia* si $f^{-1}(K)$ es compacto siempre que K es compacto.

i. Demuestre que si X y Y son espacios topológicos y Y es compacto, entonces la proyección $X \times Y \to X$ es una función propia.

ii. Demuestre que si X y Y son espacios de Hausdorff y X es compacto, entonces cualquier función continua $f : X \to Y$ es una función propia.

iii. Dados espacios topológicos de Hausdorff *localmente compactos* X y Y, y una función continua $f : X \to Y$, definimos una función $f_\infty : X \sqcup \{\infty_X\} \to Y \sqcup \{\infty_Y\}$ entre las compactificaciones de un punto de los espacios X y Y por la fórmula

$$f_\infty(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X\,, \\ \infty_Y & \text{si } x = \infty_X\,. \end{cases}$$

Demuestre que f es una función propia si y solo si f_∞ es continua.

2. Considere la 2-forma en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, con coordenadas (x, y, z), definida como

$$\omega = \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

i. Para la inclusión usual $i : S^2 \to \mathbb{R}^3$, calcule $\int_{S^2} i^*\omega$.

ii. Para la inclusión $j : S^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $j(x, y, z) = (3x, 2y, 8z)$, calcule $\int_{S^2} j^*\omega$.

iii. ¿Es $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ cerrada?, ¿es exacta? ¿Es $i^*\omega \in \Omega^2(S^2)$ cerrada?, ¿es exacta?

3.

i. Demuestre que la ecuación $(1-z^2)(x^2+y^2)=1$ define una subvariedad de $\mathbb{R}^3$.

ii. Demuestre que el campo vectorial $X = z^2 x \frac{\partial}{\partial x} + z^2 y \frac{\partial}{\partial y} + z(1-z^2)\frac{\partial}{\partial z}$ es tangente en todo punto a tal subvariedad M.

iii. Considere la familia uniparamétrica de difeomorfismos de M definida por la aplicación

$$\varphi_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

dada por $\varphi_t(x,y,z) = (x\cos t - y\sin t, x\sin t + y\cos t, z)$. Calcule $\mathcal{L}_Y X$ donde $Y = \frac{d\varphi_t}{dt}|_{t=0}$ es el campo vectorial correspondiente al flujo φ_t.

4. Sean X, Y espacios topologicos localmente contráctiles, conexos y con puntos marcados $x_0 \in X$ y $y_0 \in Y$.

i. Sea $X \vee Y$ la unión disjunta de los conjuntos, $X \cup Y / \{x_0, y_0\}$, identificando los puntos marcados. Demuestre que $\pi_1(X \vee Y, *)$ es el producto libre de $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(Y, y_0)$.

ii. Demuestre que $\pi(X \times Y, (x_0, y_0))$ es el producto directo de $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(Y, y_0)$.

iii. Suponga que X y Y tienen grupos fundamentales abelianos. Demuestre que el morfismo inducido en grupos fundamentales por la inclusión $f : X \vee Y \to X \times Y$ exhibe $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ como la abelianización de $\pi_1(X \vee Y)$.

5. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita.

i. Muestre que la aplicación $\det : \mathsf{GL}(V) \to \mathbb{R}^*$ es un homomorfismo de grupos de Lie.

ii. Muestre que la derivada de la aplicación determinante en la identidad es $\det_{*,I} = \mathrm{tr}$, i.e. la traza definida sobre elementos de $\mathsf{L}(V, V)$.

iii. Use los resultados anteriores para demostrar (sin calcular) que

$$\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}.$$

6. Considere el *Plano Hiperbólico* (H, g), i.e. el semi-plano superior $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ dotado con la metrica Riemanniana definida por

$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

i. Considere las curvas $\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ y $\eta(\theta) = (\cos\theta + 1, \sin\theta)$ en H, para $\theta \in [0, 2\pi]$. Calcule el angulo en el punto de intersección $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

ii. Demuestre que, después de reparametrizar por longitud de arco, la curva γ es una geodésica en (H, g). Ayuda: Calcule la conexión de Levi-Civita

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

usando las identidades

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right)$$

para los coeficientes de Christoffel.