Departamento de Matemáticas
Universidad de los Andes

Examen de Área: Geometría y Topología

Mayo de 2015

Responda **cinco** de las seis preguntas que encontrará en el texto. Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.

I. Responda falso o verdadero, en cuatro de las cinco preguntas, justificando matemáticamente su respuesta.

i. Todo subespacio cerrado de un espacio topológico compacto es compacto.

ii. El grupo fundamental de $\mathbb{RP}^2 \vee \mathbb{RP}^2$ es $\mathbb{Z}_2$.

iii. Cualquier aplicación continua $f : \mathbb{RP}^2 \to T^2$ debe ser homotópica a una aplicación constante.

iv. Si $\omega \in \Omega^2(S^4)$ es una 2-forma cerrada sobre la esfera S^4, entonces $\omega \wedge \omega$ debe anularse en algún punto.

v. Si $f : D^2 \to D^2$ es un homeomorfismo, existe $x \in \partial D^2$ tal que $f(x) \notin \partial D^2$.

II. Considere la subvariedad M de $\mathbb{R}^3$ definida por la ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

i. Demuestre que el campo vectorial

$$X = \frac{xz}{1+z^2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{yz}{1+z^2}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$$

es tangente a M.

ii. Diga si la 2-forma sobre $\mathbb{R}^3$ dada por

$$\omega = z dx \wedge dy,$$

es exacta en $\Omega^2(\mathbb{R}^3)$.

iii. Diga si la 2-forma sobre $\mathbb{R}^3$ dada por

$$\omega = z dx \wedge dy,$$

restringida a M, es exacta en $\Omega^2(M)$.

III. Sea X un espacio topológico y sea X_f el espacio topológico obtenido al pegar una celda n-dimensional e_n a X, mediante una aplicación continua $f : \partial e_n = S^{n-1} \to X$, $n \geq 2$. Muestre que $H_m(X) \cong H_m(X_f)$ si $m \neq n, n-1$.

IV. Considere el grupo ortogonal $\mathbb{O}(n) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid X^T X = I\}$.

i. Demuestre que $\mathbb{O}(n) \subset M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ es una subvariedad suave y que $T_X\mathbb{O}(n)$, su espacio tangente en X, es el espacio afín $\{X + AX | A^T = -A\}$.

ii. Demuestre que $\mathbb{O}(n)$ y $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ son homotópicamente equivalentes.

iii. Demuestre que $\mathbb{O}(n)$ tiene exactamente dos componentes conexas.

V. Sea G el grupo definido por la presentación

$$\langle a, b \mid b^{-1}aba^{-2} \rangle.$$

Describa un espacio topológico conexo X tal que $\pi_1(X) \cong G$.

VI. Considere la variedad $\mathbb{R}^3$ con coordenadas (x, y, z).

i. Demuestre que los campos vectoriales

$$X = -z\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z} \quad \text{y} \quad Y = -z\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial z}$$

son los generadores infinitesimales de las rotaciones en $\mathbb{R}^3$ alrededor de los ejes x y y, respectivamente.

ii. Calcule el corchete de Lie $[X, Y]$.

iii. Calcule $\mathcal{L}_{[X,Y]}\alpha$ para $\alpha = \cos^2 x dx + y dy + z dz \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$.