Universidad de los Andes **Departamento de Matemáticas**

Examen de conocimiento en el Área de geometría y topología

Tiempo: 3 horas

1. Sea $\pi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}P^2$ la proyección canónica. ¿Existe una aplicación suave $g : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{S}^2$ tal que $\pi \circ g = 1_{\mathbb{RP}^2}$?

2. a) Hallar los números $a \in \mathbb{R}$ tales que

$$\Sigma = \{(x, y, z) \mid x^2 - 2y^2 + 4z^2 = a\}$$

es una subvariedad en $\mathbb{R}^3$.

b) ¿Cuál es la dimensión de Σ?

c) ¿Es Σ una variedad conexa?

d) Escoger un punto de Σ y hallar el espacio tangente en este punto.

3. Sean X un espacio topológico compacto e Y un espacio topológico de Hausdorff, $f : X \to Y$ una biyección continua.

a) Probar que f es un homeomorfismo.

b) ¿La afirmación en a) sigue siendo verdadera si se quita la condición que Y es de Hausdorff?

4. a) Probar que el plano proyectivo real $\mathbb{R}P^2$ no es orientable.

b) Probar que el plano proyectivo complejo $\mathbb{C}P^2$ es orientable.

c) Hallar $H^2(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z})$ y $H^2(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2)$.

d) Hallar $H^4(\mathbb{C}P^2; \mathbb{Z})$ y $H^4(\mathbb{C}P^2; \mathbb{Z}_2)$.

5. Sea M una variedad compacta, orientada, sin frontera y de dimensión n, α y β son n-formas sobre M. Probar que si

$$\int_M \alpha = \int_M \beta$$

entonces $\alpha - \beta$ es una forma exacta.

6. Consideremos dos variedades complejas $M = \mathbb{C}/\{\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i\}$ y $N = \mathbb{C}/\{\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}i\}$.

a) ¿Es verdad que los espacios topológicos M y N son homeomorfos?

b) ¿Es verdad que M y N son biholomorfas?