Examen de Área: Geometría y Topología

Noviembre de 2012

I. Responda falso o verdadero, en cuatro de las cinco preguntas, justificando matemáticamente su respuesta.

i. Si $f : X \to Y$ es una función uno a uno y continua entre espacios topológicos, y Y es Hausdorff, entonces X es Hausdorff.

ii. Si σ_k denota un conjunto de k puntos distintos en $\mathbb{R}^2$, entonces $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \sigma_k, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^k$.

iii. Para toda $f : S^2 \to S^1$ continua existe $g : S^1 \to S^2$ tal que $f \circ g$ es la identidad sobre S^1.

iv. El grupo fundamental de $\mathbb{RP}^2$ es $\mathbb{Z}_2$.

v. El campo vectorial $X = e^x \frac{d}{dx} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$ es completo.

II. Sea M una variedad Riemanniana suave de dimensión n.

i. Defina el gradiente de una función suave $f \in C^\infty(M)$, la divergencia de un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ y demuestre que

$$\mathsf{div}(fX) = \langle \mathsf{grad}(f), X \rangle + f\mathsf{div}(X).$$

ii. Sea D un dominio (i.e. subvariedad compacta, de codimensión cero, con frontera) en M, $\omega \in \Omega^n(M)$ una forma de volumen sobre M y φ_t^X el flujo de un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$. Demuestre que

$$\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\ \mathsf{Vol}\left(\varphi_t^X(D)\right) = \int_{\partial D} i_X \omega.$$

III.

i. Sea X el CW-complejo formado a partir de la esfera S^2, identificando los polos norte y sur. De una descomposición celular de X y calcule su homología.

ii. Pruebe que una 2-forma ω sobre la esfera S^2 es exacta si y solamente si $\int_{\mathsf{S}^2} \omega = 0$. Calcule la cohomología de *de Rham* $H^k_{dR}(\mathsf{S}^2, \mathbb{R})$ para $k = 0, 1, 2$.

iii. Demuestre que si $\theta \in \Omega^1(\mathsf{S}^2)$ es una 1-forma invariante bajo todas las transformaciones ortogonales de $\mathbb{R}^3$, entonces θ debe ser identicamente cero.

iv. Demuestre que, para $n \geq 2$, las esferas $2n$-dimensionales no admiten 2-formas cerradas ω tales que $\omega^{2n} = \underbrace{\omega \wedge \omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{\text{n veces}}$ es una forma de volumen.

IV. Considere la variedad $\mathbb{R}^3$ con coordenadas (x, y, z).

i. Demuestre que los campos vectoriales

$$X = -z\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z} \quad \text{y} \quad Y = -z\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial z}$$

son los generadores infinitesimales de las rotaciones en $\mathbb{R}^3$ alrededor de los ejes x y y, respectivamente.

ii. Calcule el corchete de Lie $[X, Y]$.

iii. Calcule $\mathcal{L}_{[X,Y]}\alpha$ para $\alpha = e^x dx + ydy + zdz \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$.

V. Sean $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices $n \times n$ con entradas reales, $\mathsf{GL}(n)$ el conjunto de matrices invertibles en $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ y $\mathsf{Sym}(n)$ el conjunto de matrices simétricas $n \times n$.

i. Pruebe, usando la inclusión $i : \mathsf{Sym}(n) \to \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$, que $\mathsf{Sym}(n)$ es una subvariedad de $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$ de dimensión $n(n+1)/2$.

ii. Muestre que la matriz identidad I es un valor regular de la aplicación $\psi : \mathsf{GL}(n) \to \mathsf{Sym}(n) : A \mapsto AA^T$, donde A^T denota la transpuesta de A.

iii. Pruebe que el grupo ortogonal $\mathsf{O}(n) = \psi^{-1}(\mathrm{I})$ es una subvariedad compacta de $\mathsf{GL}(n)$ de dimensión $n(n-1)/2$.

iv. Encuentre el álgebra de Lie de $\mathsf{O}(n)$.

v. Demuestre que $\mathsf{O}(n)$ tiene dos componentes conexas.

VI. Considere el grupo de matrices

$$\mathbf{SU}(2) = \{A \in M(2;\mathbb{C}) \mid \overline{A}^T A = I \ \text{ y } \det(A) = 1\},$$

con la topología inducida por la topología canónica de $\mathsf{M}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^4$.

i. Muestre que los elementos de $\mathbf{SU}(2)$ son las matrices complejas 2×2 de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$, donde $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ cumple con la condición $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Deduzca de ello que $\mathbf{SU}(2)$ es una variedad diferenciable difeomorfa a S^3.

ii. Identifique el álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ (el espacio tangente en la matriz identidad del grupo de Lie $\mathbf{SU}(2)$) con el conjunto de matrices complejas 2×2 que son anti-hermitianas y de traza nula. Deduzca de ello que los elementos de $\mathfrak{su}(2)$ son las matrices complejas 2×2 de la forma $\begin{pmatrix} ix & z \\ -\overline{z} & ix \end{pmatrix}$, donde $x \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C}$.

iii. Muestre que la aplicación

$$\kappa : \begin{array}{ccc} \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (X,Y) & \longmapsto & -\mathrm{tr}(XY) \end{array}$$

es un producto escalar euclideano en $\mathfrak{su}(2)$.

iv. Muestre que la acción por conjugación de $\mathbf{SU}(2)$ en $\mathfrak{su}(2)$ preserva el producto escalar κ. Deduzca de ello que existe un homomorfismo de grupos de Lie

$$\Phi : \mathbf{SU}(2) \longrightarrow \mathbf{O}(\kappa) \simeq \mathbf{O}(3),$$

donde $\mathbf{O}(\kappa)$ es el grupo de isometrías lineales de $\mathfrak{su}(2)$ con respecto al producto escalar κ.

v. Determine el núcleo de Φ. Deduzca de ello que Φ es un cubrimiento topológico de $\mathbf{SO}(3)$.

vi. Muestre que el grupo fundamental de $\mathbf{SO}(3)$ es $\pi_1(\mathbf{SO}(3)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.