Geometría y topología. Examen de conocimiento.

1. Sean $V(x_1,x_2,x_3,x_4) = (-x_1,x_2,-x_4,x_3)$, $W(x_1,x_2,x_3,x_4) = (-x_3,x_2,x_1,-x_4)$ dos campos vectoriales en $\mathbb{R}^4$.

a) Compruebe que los campos vectoriales son tangentes a la esfera

$$\mathbb{S}^3 = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = 1\right\}.$$

Denotaremos por $\widetilde{V}$ y $\widetilde{W}$ las restricciones de los campos vectoriales V y W a la esfera;

b) Hallar el flujo del campo vectorial $\widetilde{V}$;

c) ¿Es verdadero que los flujos de $\widetilde{V}$ y $\widetilde{W}$ conmutan? Explique.

2. Sea K la botella de Klein y considere la suma conexa $X := K\#K$ de dos botellas de Klein. Halle $\pi_1(X)$, $H_*(X,\mathbb{Z})$ y $H^*(X,\mathbb{Z})$.
La suma conexa $\Sigma_1\#\Sigma_2$ de dos superficies se define de la siguiente manera: tome un punto x_1 en Σ_1 y remueva de Σ_1 un disco abierto pequeño B_1 alrededor del punto x_1. Haga lo mismo para Σ_2 y defina

$$\Sigma_1\#\Sigma_2 := (\Sigma_1 - B_1) \sqcup (\Sigma_2 - B_2)/\sim$$

donde la relación de equivalencia es la inducida por un homeomorfismo $f : \partial B_1 \to \partial B_2$ que inverte orientación.

3. Sea $\pi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$, $x \mapsto [x]$, el cubrimiento universal. Hallar el homomorfismo inducido en homología por π, $\pi_* : H_*(\mathbb{S}^n; k) \to H_*(\mathbb{RP}^n; k)$, donde
a) $k = \mathbb{Z}$;
b) $k = \mathbb{Z}_2$.

4 Sean $\pi_a : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ las proyecciones, $\pi_a(x_1, x_2) = x_a$, $a = 1, 2$. Sea ω la restricción de la forma $x_3 dx_1 \wedge dx_2 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 + x_1 dx_2 \wedge dx_3$ en $\mathbb{R}^3$ a la esfera $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, y $\eta = \pi_1^* \omega + \pi_2^* \omega$.

a) Pruebe que $d\eta = 0$.

b) Pruebe que $[\eta] \in H^2_{DR}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)$ es diferente de cero.

5 Diga si las siguientes sentencias son Verdaderas o Falsas. Justifique.

a) Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua entre espacios topológicos X y Y. Es posible que exista un conjunto cerrado A tal que $f(A)$ es abierto y no es cerrado.

b) Existe una variedad M conexa de dimensión 2 tal que $\dim H^1_{DR}(M) = \infty$.

c) Sean ξ y η haces vectoriales. Si ξ no es trivial y η es trivial, entonces $\xi \oplus \eta$ no es trivial.

d) Sea $\pi : \widetilde{M} \to M$ es un cubrimiento universal de variedades, donde $\widetilde{M}$ es compacta. Entonces M es compacta y el grupo fundamental de M es finito.

e) Sea M es una variedad compacta, conexa y simplemente conexa. Entonces $H^1_{DR}(M) = 0$.