Universidad de Los Andes — Departamento de Matemáticas

Examen Geometría y Topología

Mayo de 2011

1. Responda falso o verdadero, justificando –matemáticamente– su respuesta.

i. Toda función $f : S^2 \to S^1$ contínua es homotópica a una función constante.

ii. Existe un retracto de D^2 sobre el círculo S^1.

iii. La aplicación exponencial para $SL(2, \mathbb{R})$ es sobre.

iv. $\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{o}(3)$, donde $\mathfrak{g}$ denota el álgebra de Lie del grupo de Lie G.

v. El grupo fundamental de $S^1 \bigvee S^1$ es $\mathbb{Z}_2$.

2. Sea $M_n(\mathbb{R})$ la variedad de matrices $n \times n$ con coeficientes reales y, para $A \in M_n(\mathbb{R})$, considere el campo vectorial

$$\mathfrak{X}_A(X) = A \cdot X.$$

i. Calcule el flujo del campo vectorial $\mathfrak{X}_A$ sobre $M_n(\mathbb{R})$.

ii. Es $\mathfrak{X}_A$ un campo vectorial completo?

iii. Calcule el corchete de Lie $[\mathfrak{X}_A, \mathfrak{X}_B]$, para $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

3. Calcule las siguientes (co)homologías:

i. $H_k(\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^3, \mathbb{Z})$ para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

ii. $H^k_{dR}(S^2, \mathbb{R})$ para la esfera $k = 0, 1, 2$.

iii. Pruebe que una 2-forma $\omega \in \Omega^2(S^2)$ es exacta si y solamente si $\int_{S^2} \omega = 0$.

4. Sea (M, g) una variedad Riemanniana con forma de volumen $\omega_g \in \Omega^n(M)$. Pruebe que

$$\omega_g(X_1, \ldots, X_n)\omega_g(Y_1, \ldots, Y_n) = \det[g(X_i, Y_j)]^n_{i,j=1}$$

para cualquier conjunto de campos vectoriales $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n \in \mathfrak{X}(M)$.

5. Sea D^n el disco unitario en $\mathbb{R}^n$ y S^{n-1} su frontera. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i. No existe un retracto $D^n \to S^{n-1}$.

ii. Toda aplicación continua $D^n \to D^n$ tiene un punto fijo.