Universidad de Los Andes — Departamento de Matemáticas

Examen Geometría y Topología

Junio de 2009

1. Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua de un espacio topológico X en un espacio de Hausdorff Y. Pruebe que el grafo $\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$ es cerrado en $X \times Y$.

2. Sea D^n el disco unitario en $\mathbb{R}^n$ y S^{n-1} su frontera. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) No existe un retracto $D^n \to S^{n-1}$.

(ii) Toda aplicación continua $D^n \to D^n$ tiene un punto fijo.

3. Calcule, directamente de la definición, los grupos de cohomología simplicial, con coeficientes en $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}_2$, del toro $T = S^1 \times S^1$. Calcule y compare, para la misma variedad, la correspondiente cohomología de De Rham.

4. Considere el plano proyectivo complejo $\mathbb{CP}^n$ y sea $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ la esfera $2n + 1$-dimensional en $\mathbb{R}^{2n+2} \cong \mathbb{C}^{n+1}$.

(i) Muestre que $\mathbb{CP}^n$ es una variedad compleja. Es $\mathbb{CP}^n$ compacta?, es orientable?

(ii) Sea $\pi : S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$ la aplicación $\pi(z_0, z_1, \ldots, z_n) = [z_0, z_1, \ldots, z_n]$. Suponga que π es homotópica a una aplicación constante F_0, y llame $F : S^{2n+1} \times [0, 1] \to \mathbb{CP}^n$ a una homotopía de F_0 a $F_1 = \pi$. Sea $g : D^{2n+2} \to \mathbb{CP}^n$ la extensión continua de π dada por

$$g(tz) = F(z, t), \qquad z \in S^{2n+1}, t \in [0, 1].$$

a. Defina $h : D^{2n+2} \to \mathbb{CP}^{n+1}$ por

$$h(z_0, z_1, \ldots, z_n) = \left[z_0, z_1, \ldots, z_n, \left(1 - \sum_{j=0}^{n} \mid z_j \mid^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

Muestre que h envía el interior del disco D^{2n+2} biyectivamente sobre $\mathbb{CP}^{n+1} - \mathbb{CP}^n$.

b. Muestre que $h \mid_{S^{2n+1}}$ es la composición de π con la inclusión $j : \mathbb{CP}^n \hookrightarrow \mathbb{CP}^{n+1}$.

c. Encuentre $f : \mathbb{CP}^n \to \mathbb{CP}^{n+1}$ continua tal que $f \circ h = g$. Observe que $f \circ j = \mathrm{id}_{\mathbb{CP}^n}$ y, pasando a cohomología, muestre que π *no puede ser* homotópica a una constante.

5. Responda falso o verdadero, justificando –matemáticamente– su respuesta.

(i) El conjunto de matrices reales 2×2 con determinante igual a 3 es una variedad (en $\mathbb{R}^4$).

(ii) La distribución $D_{(x,y,z)} = \left\{(u, v, w) \in T_{(x,y,z)}\mathbb{R}^3 \mid w - xv = 0\right\}$ es una distribución integrable en $\mathbb{R}^3$.

(iii) $\mathrm{Lie}(S^3) = \mathrm{Lie}\ (O(3))$, donde $\mathrm{Lie}(G)$ denota el álgebra de Lie del grupo de Lie G.

(iv) El grupo fundamental de $S^1 \bigvee S^1$ es $\mathbb{Z}_2$.