Universidad de Los Andes — Departamento de Matemáticas

Examen Geometría y Topología

Diciembre de 2008

1. Considere el espacio

$$X = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}$$

con la topología de cajas (i.e., los abiertos básicos son de la forma $\prod_{i=1}^{\infty} V_i$, donde V_i es un abierto de $\mathbb{R}$). Muestre que la función $f : \mathbb{R} \to X$ dada por

$$f(t) = (t, t, t, \dots)$$

no es contínua.

2. Considere el dominio $\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq 1\right\}$. Calcule la integral

$$\int_{\partial\Omega} x \, dx \wedge dy.$$

3. Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ campos vectoriales suaves en una vecindad de $0 \in \mathbb{R}^n$, tales que $[X_i, X_j] = 0$ para todo $i, j = 1, 2, \dots, n$, y tales que $X_1(0), \dots X_n(0)$ son linealmente independientes. Muestre que existe un sistema de coordenadas $(y^1, \dots, y^n)$ alrededor de 0 tal que $X_k = \frac{\partial}{\partial y^k}$.

4. De un ejemplo de un campo vectorial completo sobre una variedad. De un ejemplo de un campo vectorial que *no* sea completo sobre una variedad.

5. Muestre que el conjunto $O(n, \mathbb{R})$ (matrices $n \times n$ ortogonales con entradas reales) es un grupo de Lie compacto, defina sobre él una métrica Riemanniana y calcule su álgebra de Lie.

6. Responda falso o verdadero, justificando –matemáticamente– su respuesta.

(i) Toda función $f : S^2 \to S^1$ contínua es homotópica a una función constante.

(ii) Existe un retracto de D^2 sobre el círculo S^1.

(iii) $\mathbb{R}^2$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ para algún $n \neq 2$.

(iv) El grupo fundamental del toro T^2 es no abeliano.