# Geometría y Topología – Examen de Área

Mayo de 2008

**Haga cinco (5) de los siete (7) problemas siguientes.**

## **I**. Topología general

**1.** Muestre que el producto de un espacio paracompacto y Hausdorff con un espacio compacto y Hausdorff es paracompacto. Incluya en su respuesta la definición de paracompacto.

**2.** Para cada $x$ en la linea real $\mathbb{R}$, sea $\mathbb{R}_x$ una copia de la linea real con su topología usual. Considere el espacio

$$X = \prod_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{R}_x$$

con la topología producto.
Tiene $X$ un subconjunto contable denso? Existe una base contable para $X$? Justifique sus respuestas.

## **II**. Variedades y formas diferenciales

**3.** Sea $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la esfera de radio 1. Defina para todo $p \in S^2$ la aplicación

$$\omega : T_pS^2 \times T_pS^2 \to \mathbb{R}, \qquad \omega(X_p, Y_p) := (X_p \times Y_p) \cdot p$$

donde $X, Y$ son campos vectoriales y $X_p \times Y_p$ es el producto cruz en $\mathbb{R}^3$.
Demuestre que $\omega$ es una dos-forma diferencial sobre $S^2$, calcule $\int_{S^2} \omega$ y demuestre que su clase de cohomología de De Rham es no trivial.

**4.** Sea $f : S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^3$ el encajamiento del toro en el espacio euclideo definido por

$$f(\theta, \phi) \mapsto ((R + r\cos\theta)\cos\phi, (R + r\cos\theta)\mathrm{sen}\phi, r\mathrm{sen}\theta)$$

donde $R > r$.
Halle la métrica inducida en el toro por la métrica euclidea en $\mathbb{R}^3$. Demuestre que para todo ángulo $\phi$ constante, los círculos definidos en el toro por ese ángulo son geodésicos.

Demuestre que en el caso de que el ángulo $\theta$ sea constante, los círculos definidos en el toro por ese ángulo son geodésicos si y sólo si $\theta$ es 0 ó $\pi$.
AYUDA: La ecuaciones diferenciales que satisfacen las geodésicas se pueden obtener aplicando el método de Euler-Lagrange al funcional $L = g_{ij}x_i'x_j'$.

**5.** Demuestre que una distribución suave $\Delta$ sobre $M$ es involutiva si y sólo si el ideal de formas correspondiente

$$I = \bigoplus_{k=1} I^k \quad \text{donde} \quad I^k = \{\omega \in \Omega^k M \mid \omega(X_1, \ldots, X_k) = 0 \text{ para } X_i \in \Delta\}$$

es un ideal diferencial, i.e. $I$ es un ideal de $\Omega^* M$ y además $dI \subset I$.

## III. Topología algebraica

**6.** Sea $f : S^2 \to S^2$ una función continua de la esfera unitaria en sí misma de tal forma que $||f(p) - p|| < 1$ para todo $p \in S^2$. Es la función $f$ sobreyectiva? Demuestre su respuesta.

**7.** Existe alguna función continua $S^6 \to \mathbb{C}P^3$ de la esfera al espacio proyectivo complejo cuyo grado sea diferente de cero?