Geometría y Topología – Examen de Área

Enero de 2008

I. Topología general

1. Sea $\{X_n\}$ una coleección enumerable de conjuntos finitos con la topología discreta.
a. Muestre que $X = \prod_n X_n$ es compacto y Hausdorff en la topología producto.
b. Muestre que X es metrizable exhibiendo una métrica explícita.

II. Variedaes y formas diferenciales

2a. Pruebe que $SO(3)$ es un grupo de Lie y es difeomorfo al espacio proyectivo $\mathbb{R}P^3$.

2b. Pruebe que S^2 y $S^1 \times S^1$ no son difeomorfas.

3. Sea $S^n(r)$ la esfera de radio r centrada en el origen en $\mathbb{R}^{n+1}$ y sea $r^2 = x_0^2+x_1^2+\cdots+x_n^2$. Defina

$$\omega := \frac{1}{r}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+1}x_i dx_0 \wedge dx_1 \wedge \cdots dx_{i-1} \wedge \widehat{dx_i} \wedge dx_{i+1} \cdots \wedge dx_n$$

donde la expresión $\widehat{dx_i}$ significa que se ha removido de la formula.
a. Muestre que $dr \wedge \omega$ es una forma de volumen.
b. Muestre que ω representa un elemento no trivial en la cohomologia de De Rham $H^n_{DR}(S^n(r))$.
c. Modifique la forma diferencial ω de tal manera que represente a un elemento no trivial de la cohomologia de De Rham $H^n_{DR}(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})$.

III. Topología algebraica

4. Considere el espacio $X = Gl_2^+(\mathbb{R})$ de matrices 2×2 con entradas reales y determinante positivo, con la topología inducida de $\mathbb{R}^4$. Demuestre que X es conexo y calcule su grupo fundamental.

5. Sea M una variedad de dimensión n compacta, orientada y conexa. Sea $f : M \to M$ una función continua tal que

$$f_* : H_n(M; \mathbb{Z}) \to H_n(M; \mathbb{Z})$$

es un isomorfismo. Demuestre que los homomorfismos inducidos $f_* : H_q(M; \mathbb{Z}) \to H_q(M; \mathbb{Z})$ son todos isomorfismos para $q \geq 0$.