Examen de conocimiento en
Ecuaciones Diferenciales
2024-20

1. (a) (2 points) Sean $u \in \mathbb{R}$ y $1 < p \leq 2$. Demuestre que existe $C > 0$ tal que $\forall u \in \mathrm{R}$ se cumple

$$|1+u|^p \geq 1 + pu + c\theta, \quad \text{donde} \quad \theta(u) = \begin{cases} |u|^2, & |u| < 1 \\ |u|^p, & |u| \geq 1 \end{cases}$$

Para $p > 2$ pruebe que $|1+u|^p \geq 1 + pu + c|u|^p$

(b) (8 points) Sean $1 < p < \infty$, $x_n \in L_p(0,1)$ tales que $x_n \rightharpoonup x$ débilmente y $\|x_n\| \to \|x\|$. Demuestre que $x_n \implies x$ fuertemente.
Sugerencia: Use las desigualdades del ítem (a)

2. (10 points) Sean: $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\Omega = \{x^2 + y^2 < 1\}$, y C una constante. Resuelva el siguiente problema:

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{y}{x^2+y^2}, & \text{en } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = x^2 + C. \end{cases}$$

3. (10 points) Resuelva el problema de Cauchy para la ecuación de calor con $x \in \mathbb{R}^1$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3t^2,$$

con la condición inicial:

$$u(x,0) = \sin x.$$

4. Suponga la ecuación de reacción-difusión en dimensión uno,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\,\Delta u + ru(1-u)$$

donde D es el coeficiente de difusión, $u = u(x,t)$ es una función suave definida en $[0,1] \times [0,1]$ con condiciones iniciales y de frontera,

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = \sin(\pi t)$$

Se quiere hallar la solución aproximada de u usando el método de diferencias finitas.

(a) (5 points) Escriba la ecuación discretizada a resolver numéricamente.

(b) (5 points) Para establecer una solución aproximada de este problema, ¿es necesario alguna condición de estabilidad? En tal caso, ¿cuál sería?

5. Considere la ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(0) = y_0.$$

(a) (5 points) Explique detalladamente el método de Euler para aproximar la solución de esta ecuación en un intervalo $t \in [0, T]$ utilizando un paso de tiempo Δt.

(b) (5 points) Aplique el método de Euler para un solo paso partiendo de $t = 0$ y usando un paso de tiempo $\Delta t = 0.1$ para la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = -y + t^2, \quad y(0) = 1.$$

No es necesario continuar con más pasos. Sólo escriba la expresión del primer paso y explíquela.
