Departamento de Matemáticas Universidad de Los Andes

Examen de Conocimiento en Análisis funcional, ecuaciones diferenciales y análisis numérico

2023

Justifique matemáticamente todas sus respuestas. Si usa algún teorema, explique claramente cuál es y por qué es aplicable. Respuestas sin prueba no valen. No es permitido el uso de ningún tipo de ayuda (libros, calculadoras, dispositivos electrónicos etc.).

Tiempo: 3 horas. Escoja uno entro los dos ejercicios con (*)

1. Sea $u \in \mathcal{C}_c^1([0,1];\mathbb{R})$.

   (a) Mostrar que

   $$\sup_{x\in[0,1]} |u(x)| \leq \sqrt{\int_0^1 (u'(x))^2 dx}.$$

   (b) Muestre con item (a) que

   $$\int_0^1 (u(x))^2 dx \leq \int_0^1 (u'(x))^2 dx.$$

   (c) Dé una interpretación topológica de las desigualdades del item (a) y del item (b) en el contexto del espacio de Sobolev $H_0^1(0,1)$.

2. Formúle el teorema del punto fijo de Banach y muéstrelo. Aplique este teorema para mostrar que la ecuación diferencial

$$y' = \sin(y), \qquad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}.$$

tenga una solución única local. Después demuestre que tenga una solución global.

3. (*) Sea $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función no negativa y continua, $w : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua y no decreciente, con $w(s) > 0$ para $s > 0$, y $a \geq 0$. Se satisface la desigualdad integral

$$u(t) \leq a + \int_0^t w(u(s))ds \qquad 0 \leq t \leq t_1.$$

   (a) Muestre que

$$u(t) \leq G^{-1}\Big(G(a) + t\Big), \qquad 0 \leq t \leq t_1 \tag{1}$$

   para cualquier valor $r > r_0 > 0$ donde

$$G(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{ds}{w(s)},$$

   y t_1 es tal que para toda $0 \leq t \leq t_1$

$$G(a) + t \in \mathrm{dom}(G^{-1}).$$

   Indicación: empiece con la función auxiliar $z(t) := a + \int_0^t w(u(s))ds$ *y calcule una desigualdad diferencial adecuada para* $G(z(t))$.

   (b) Compare la desigualdad (1) (la desigualdad de Bihari) con lo que se obtiene como resultado de la desigualdad de Gronwall. ¿Cuáles diferencias importantes le llaman la atención?

4. Determine todas las funciones $f \in \mathcal{C}([0,\pi];\mathbb{R})$ tales que el problema

$$y''(x) + y(x) = f(x) \qquad \text{con} \qquad y(0) = y(\pi) = 0$$

tenga una solución.

5. Encuentre el mínimo del funcional

$$I(v) := \int_\Omega \left(|\nabla v(x)|^2 + \frac{4v(x)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) dxdy$$

donde $v \in \mathcal{C}_0^2(\Omega;\mathbb{R})$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ con $\Omega = \{1 < x^2 + y^2 < 9\}$.

6. Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Para $s \in \mathbb{R}$ definamos los operadores $P(s)$:

$$(P(s)f)(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < s \leq 0, \\ \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{|y|<\sqrt{s}} \hat{f}(y) e^{i\langle x,y\rangle} dy & 0 < x < \infty, \end{cases}$$

donde $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$ y

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x) e^{-i\langle x,y\rangle} dx.$$

Muestre las propiedades siguientes:

(a) $\|P(s)f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ para $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$.

(b) $\langle P(s)f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \langle f, P(s)g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ para $f, g \in L^2(\mathbb{R}^3)$.

(c) $\|P(s)f - f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \xrightarrow{s\to\infty} 0$ para $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$.

(d) $\|P(s)f - P(\tilde{s})f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \xrightarrow{s-\tilde{s}\to 0} 0$ para $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$.

(e) $P(s) = P(\tilde{s})P(s)$ para $s \leq \tilde{s}$.

7. (*) Usando las propiedades del ejercicio 6. muestre la descomposición siguiente del Laplaciano

$$-\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} s dP(s),$$

donde la integral de Stieltjes converge fuertemente, es decir, para toda $f \in H^2(\mathbb{R}^3)$

$$\| -\Delta f - \sum_{k=1}^{N} s_k \big(P(s_k) - P(s_{k-1})\big) f \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \to 0, \qquad N \to \infty,$$

donde para $N \to \infty$, $0 = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_N$ y $\max_{1 \le k \le N}(s_k - s_{k-1}) \to 0$ y $s_N \to \infty$.