Examen de área de EDP y Analysis Numérico.
26 de Mayo de 2011

Nota Hacer toda la parte A y escoger entre el problema B.1 o B.2 en la parte B.

Parte A

Ejercicio A.1 Enunciar el teorema de principio de máximo para funciones armónicas sobre un disco abierto en $\mathbb{R}^2$ y presentar unas aplicaciones de este teorema.

Ejercicio A.2 Sea $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ y $f : D \to \mathbb{R}$ que admite derivadas debíles $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en los semidiscos $D^- = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1, y < 0\}$ y $D^+ = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$. ¿ Se puede afirmar que f tiene derivada debil $\frac{\partial f}{\partial y}$ en D?

Ejercicio A.3 Sea E la elipse $\{(x, y), 4x^2 + y^2 \leq 1\}$. Resolver el problema de frontera:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 5 \\ u|_{\partial E} = 1. \end{cases}$$

Ejercicio A.4 Hallar el mínimo de la función I definida por

$$I(v) = \int_G \{\frac{|\text{grad } v|^2}{2} + \frac{4v}{\sqrt{x^2 + y^2}}\} \, dxdy$$

donde $G = \{1 < x^2 + y^2 < 9\}$, $v \in C^1(G)$ y $v = 0$ en la frontera de G.

Parte B

Problema B.1

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertible y el sistema lineal $Ax = b$. Se considera el método iterativo

$$x^0 \text{ elegido y } x^{k+1} = x^k + a_k r^k$$

donde a_k es un escalar para escoger y r^k es el residuo dado por $b - Ax^k$. Notemos $\|.\|_2$ la norma euclideana en $\mathbb{R}^n$

B.1.1 Mostrar que $\|r^{k+1}\|_2$ es mínimo cuando

$$a_k = \frac{\langle r^k, Ar^k \rangle}{\langle Ar^k, Ar^k \rangle}. \tag{1}$$

[B.1.2 ¿ Cúal es el valor del escalar a_k si A es hermitiana definida positiva y se busca minimizar $\|r^{k+1}\|_A$? Acá $\|.\|_A$ es la norma del producto escalar asociado a A.

[B.1.3 Mostrar que con la elección de (1) se tiene

$$\|r^{k+1}\|_2^2 = \|r^k\|_2^2 \left(1 - \left| \frac{{r^k}^t A^t r^k}{{r^k}^t r^k} \right|^2 \left(\frac{\|r^k\|_2}{\|Ar^k\|_2} \right)^2 \right)$$

[B.1.4 Sea

$$d = \inf_{\|x\|_2 = 1} x^t A^t x$$

Mostrar que si $d > 0$ el método es convergente.

[**B.1.5** Mostrar que en este caso

$$\|r^{k+1}\|_2 \leq \|r^k\|_2 \sqrt{1 - d^2/\|A\|_2^2}$$

¿ Qué se puede concluir acerca de la convergencia?

Problema B.2

Una matriz real se dice positiva (resp. estrictamente positiva)si todos sus elementos son positivos (resp. estrictamente positivos). Una matriz real cuadrada se dice monótona si es invertible y su inversa es positiva.

B.2.1 Mostrar que una matriz cuadrada es monótona si y solo si

$$\forall x \in \mathbb{R}^n Ax \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

B.2.2 Sean $I = [0,\ 1]$ y f, c dos funciones continuas sobre I tal que $c(x) \geq 0$ para todo $x \in I$, y α, β dos reales. Consideramos el problema de frontera :

$$(\pi) \left\{ \begin{array}{ll} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x) & 0 < x < 1 \\ u(0) = \alpha, u(1) = \beta \end{array} \right.$$

Sea N un entero positivo, $h = 1/(N+1)$ y $x_i = ih, \quad i = 1 \dots N$. Haciendo la aproximación

$$u''(x_i) = \frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1})}{h^2} + \frac{h^2}{12} u^{(4)}(x_i + \theta_i h)$$

con $|\theta_i| < 1$, $i = 1 \dots N$, escribir la forma disrectizada del problema (π) en la forma

$$A_h u_h = b_h + r_h, \qquad \text{(SL)}$$

donde A_h es una matriz cuadrada de orden N, u_h, b_h, r_h son vectores en R^N. (u_h es el vector de componentes $u(x_i)$ donde u la solución del problema (π), r_h es el residuo que se desprecia por su pequeño tamaño.) El objectivo de este problema es mostrar que este metodo de diferencia finitas es consistente, es decir que si omitimos en (SL) el vector r_h la solución ϕ_h del sistema linal

$$A_h \phi_h = b_h \qquad \text{(SLA)}$$

es una buena aproximación de u_h y $\|\phi_h - u_h\|$ tiende a cero cuando h vuelve mas pequeño.

B.2.3 Mostrar que A_h es mont́ona (Ayuda: usar B.2.1 , tomar un vector v y considerar el entero p tal que $v_p \leq v_i$, $i = 1...N$, suponiendo al principio $c(x)$ siempre estrictamente positiva después c como está en el problema.)

El problema π_0 es el problema π en el caso particular de $c = 0$ en I. Sea $A_{0,h}$ la matriz correspondiente.

B.2.4 Estudiar el signo de las matrices $A_h - A_{0,h}$ y $(A_{0,h}^{-1} - A_h^{-1})$ y deducir que

$$\|A_h^{-1}\|_\infty \leq \|A_{0,h}^{-1}\|_\infty$$

B.2.5 Encontrar la solución ψ de π_0 correspondiente a $f = 1$ y calcuar el resto r_h para este caso.

B.2.6 Sea $e \in R^N$ tal que $e_i = 1, i = 1...N$. Verificar que $\|A_{0,h}^{-1}\|_\infty = \|A_{0,h}^{-1} e\|_\infty$ y deducir que

$$\|A_{0,h}^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{8}$$

B.2.7 Deducir que

$$\|\phi_h - u_h\|_\infty \leq \frac{1}{96} \sup_{0 \leq x \leq 1} |u^{(4)}(x)| h^2$$