EXAMEN MAESTRÍA-DOCTORADO. ECUACIONES PARCIALES Y ANÁLISIS NUMÉRICO

Para este examen seguimos la siguiente convención para definir el Laplaciano (Δ) en $\mathbf{R}^n$

$$\Delta := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

1. a. Halle la función de Green para la ecuación de Poisson con dominio en al plano $\mathbf{R}^2$ y en el espacio 3-dimensional $\mathbf{R}^3$.

b. Halle la función de Green para el semiplano $y > 0$, con condición de borde $G(x, y) = 0$ si $y = 0$, y úsela para resolver el problema $\Delta u = 0$ con condición de borde $u(x, 0) = f(x, 0)$.

c. Halle la función de Green para el semiplano, con condición de frontera $\frac{\partial G}{\partial y} = 0$ si $y = 0$.

2. Considere el problema de valor inicial

$$u_t = \frac{1}{2} u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} T_1, & x < 0 \\ T_2, & x \geq 0 \end{cases}$$

a. Encuentre la solución $u(x, t)$ del Problema de Valor Inicial.

b. Encuentre $\lim_{t \to 0} u(x, t)$ y $\lim_{t \to \infty} u(x, t)$.

c. Muestre que para cada $t > 0$ fijo y dado $T_1 < \theta < T_2$ existe x_0 tal que $u(x_0, t) = \theta$.

d. Muestre que $u(x, t)$ es constante sobre las parábolas de la forma $\frac{x}{\sqrt{t}} = const$.

3. Sea $u = u(x, t)$ una solución de la ecuación de onda $u_{tt} = \Delta u$ en $\mathbf{R}^n \times (0, \infty)$. Fijados $x_0 \in \mathbf{R}^n$ y $t_0 > 0$, considérense el cono

$$C = \{(x, t) \in \mathbf{R}^n \times [0, \infty) \mid 0 \leq t \leq t_0, |x - x_0| \leq t_0 - t\},$$

y la bola cerrada $B = \overline{B}(x_0, t_0) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x - x_0| \leq t_0\}$.

Mostrar que si $u \equiv u_0 \equiv 0$ en B, entonces $u \equiv 0$ en C. Interpretar el resultado.

[Sugerencia: Considérese la integral de energía:

$$e(t) := \frac{1}{2} \int_{B(x_0,t_0)} [u_t^2(x,t) + |\nabla u(x,t)|^2].dx, 0 \leq t \leq t_0.$$

(Aquí ∇u denota el gradiente de u con respecto a las variables x)].

4. Considere el problema de frontera sobre el intervalo $[0,1]$

$$\frac{d}{dx}\left(p\left(x\right)\frac{du\left(x\right)}{dx}\right) = f\left(x\right) \quad u\left(0\right) = u\left(1\right) = 0.$$

a. Suponiendo que usted está utilizando un "grid" de puntos equiespaciados en $[0,1]$, produzca una discretización por diferencias finitas de este problema que resulte en un sistema de ecuaciones lineales simétrico.

b. Halle el término principal del error por truncamiento de la discretización dad en (a).

5. Considere el método de Runge-Kutta de dos etapas

$$y^* = y^n + a\Delta t f\left(y^n\right)$$
$$y^{n+1} = y^n + \Delta t\left(b_1 f\left(y^n\right) + b_2 f\left(y^*\right)\right)$$

para la ecuación diferencial ordinaria $y' = f\left(y\right)$.

a. Derive las ecuaciones para a, b_1, b_2 dadas por el método de segundo orden.

b. Halle el intervalo de estabilidad para el método.

6. Considere el problema de valor de frontera

$$\Delta u + cu = f \quad \text{en} \quad \Omega, \qquad u = g \quad \text{en} \quad \partial\Omega$$

dónde c, f, g son funciones suaves, y además $c\left(x\right) > a$ para todo $x \in \Omega$ y a es una constante positiva.

a. Dé una formulación variacional para este problema.

b. Describa una aproximación de Galerkin por elementos finitos lineales a trozos para este problema. Explique como a partir del método de elementos finitos se llega a un sistema algebraico.

c. Bajo qué condiciones el método converge?