Examen de conocimiento en análisis.

May 2, 2025

Justifique matemáticamente todas sus respuestas. Si usa algún teorema, explique claramente cuál es y por qué es aplicable. Respuestas sin pruebas no se tienen en cuenta. No es permitido es uso de ningń tipo de ayuda (libros, calculadoras, dispositivos electónicos etc.). Todos los dispositivos electrónicos deben permanecer apagados y guardados.

(1.) Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de *Banach* y sea $\varnothing \neq C \subset X$ un subconjunto simetrico ($C = -C$), abierto, acotado y convexo que contiene 0. Muestre que C es la intersección de semispacios afines abiertos, es decir existe $\Gamma \subset X^*$ tal que

$$C = \bigcap_{f \in \Gamma} \{x : f(x) < 1\}.$$

(2.) Sea $\mathrm{M}(\mathbb{R})$ el espacio de las medidas complejas de *Borel* regulares $\mathbb{R}$ con operaciones puntuales y normado por

$$\|\nu\| := |\nu|(\mathbb{R}).$$

(Aquí $|\nu|$ denota la variación total.) Defina $\iota : \mathcal{L}_1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}(\mathbb{R})$ por $\iota(f) = \mu_f$, donde μ_f es la medida definida por

$$\mu_f(E) = \int_E f \, d\lambda,$$

para $E \in \mathcal{B}$.

(i.) Muestre que ι es una isométria.

(ii.) Determine si ι es sobreyectiva o no.

(3.) Utilizando el teorema de *Fubini* y la relación $1/x = \int_0^\infty e^{-xt} \, dt$ para $x > 0$ calcule

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^n \frac{\sin(x)}{x} \, dx.$$

Por favor, explique porque se puede aplicar el teorema de *Fubini*, la averiguación de las condiciones del teorema será evaluada.

(4.) Sean E, F espacios de *Banach* y suponga que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son operadores acotados en $\mathscr{L}(E;F)$. Suponga que existe un $M \geq 0$ tal que $\|T_n\| \leq M$ para todos $n \in \mathbb{N}$. Demuestre:

$$G := \{f \in E : \lim_{n\to\infty} T_n f \text{ existe}\}$$

es un sub-espacio cerrado en E, y

$$T : G \to F, \quad Tf := \lim_{n\to\infty} T_n f$$

es un operador acotado con $\|T\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$.

(5.) Sea $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

(a.) Demuestre que la función $\tanh(x)$ tiene inversa para todos $x \in (-\infty, \infty)$. Denote $\operatorname{arctanh}(x)$ la dicha inversa.

(b.) Demuestre que $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

(c.) Sea $0 < k < 1$, denote

$$I(k,x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Demuestre que la integral $I(k,1)$ converge para $k < 1$ y diverge para $k = 1$.

(d.) Demuestre que $I(k,x) \to I(1,x) = \operatorname{arctanh}(x)$ cuando $k \to 1-$, $x \in (0,\infty)$.

(6.) Sea $f(z) = \frac{z\cos(z)}{\sin(z)-1}$.

(a.) Determine las singularidades aisladas de f y determine de qué tipo de singularidades se trata.

(b.) Calcule $\displaystyle\int_{|z|=\pi} f(z)\, dz$.