Examen de conocimiento Análisis 2024-2

Ejercicio 1.

1. Halle la serie de Taylor de la función $\sin(x^3)$ alrededor de $x = 0$.
2. Use la fórmula de error de Taylor para aproximar $\int_0^{1/10} \sin(x^3)\ dx$ con un error menor a 10^{-6}.
3. Exprese $\int_0^{1/10} \sin(x^3)\ dx$ como una serie alternante y use este hecho para aproximar la integral con un error menor a 10^{-6}.

Ejercicio 2. Sea f una función Lebesgue medible positiva en $[0, 1]$ y sea λ la medida de Lebesgue.

1. Definimos $\int^* f d\lambda = \text{ínf}\{\sum_i [\sup_{x \in A_i} f(\omega))]\lambda(A_i)\}$ donde el ínfimo se toma sobre las particiones finitas $\{A_i\}_{i \leq n}$ de $[0, 1]$ y el supremo se toma en $[0, \infty]$.
2. Pruebe que si f está acotada, entonces $\int^* f\ d\lambda$ coincide con la integral de Lebesgue.
3. Encuentre un ejemplo de una función no acotada que es Lebesgue integrable pero que satisface $\int^* f d\lambda = \infty$.

Ejercicio 3. Considere $H = L^2(\mathbb{R})$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot g(x) dx$. Sea $T : H \to H$ que manda f a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} f \restriction_{[n,n+1]}$.

1. Pruebe que T is lineal.
2. Pruebe que $\|Tf\| \leq \|f\|$.
3. Halle el espectro puntual de T.
4. Determine si el operador T es compacto.

Ejercicio 4. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ sea un espacio de medida con $0 < \mu(X) < \infty$. Suponga que para cada $A \in \mathcal{B}$ con $\mu(A) > 0$ existe $B \subset A$ con $B \in \mathcal{B}$ que satisface

$$0 < \mu(B) < \mu(A).$$

1. Pruebe que existen conjuntos de medida arbitrariamente pequeña, es decir, que para todo $t > 0$ existe $E \in \mathcal{B}$ con $0 < \mu(E) < t$.
2. Pruebe que para todo $0 < t < \mu(X)$ existe $E \in \mathcal{B}$ con $\mu(E) = t$.

Ejercicio 5. Evalúe la integral

$$\int\limits_{|z|=9} \frac{1}{e^z - 1} dz$$

Ejercicio 6. Considere la función $f(x) = \sqrt{x}$ para $x \in [0, \infty)$.

1. Pruebe que si $x \in [1, \infty)$ entonces $f(x)$ es 1-Lipschitz.
2. Para $x \in [0, 1]$ halle una función $\delta(\epsilon) > 0$ tal que si $\epsilon > 0$ y $x, x_0 \in [0, 1]$, si $|x - x_0| < \delta(\epsilon)$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.