Examen de Conocimiento en Análisis
17 de mayo de 2024

Resuelva **6** *de los siguientes* **7** *ejercicios. Escriba bien legible en la casilla al lado el número del ejercicio* **no** *va a resolver. Si no es legible o si deja la casilla en blanco, se quitará el ejercicio con la mejor calificación.*

Justifique matemáticamente todas sus respuestas. Si usa algún teorema, explique claramente cuál es y por qué es aplicable. Respuestas sin prueba no valen. No es permitido el uso de ningún tipo de ayuda (libros, calculadoras, dispositivos electrónicos etc.). Todos los dispositivos electrónicos deben permanecer apagados y guardados.

Tiempo: 3 horas.

1. Muestre que todo número real positivo se deja escribir como suma posiblemente infinita de términos distintos de la serie armónica.

2. Sea A el conjunto de todas las funciones $f \in C([0,1])$ que cumplen con

$$\int_0^1 (f(x))^2 \,\mathrm{d}x = 1, \qquad |f(x) - f(y)| \leq |x - y| \quad \text{para todo } x, y \in [0,1].$$

   (a) Demuestre que existe $M \geq 0$ tal que $\|f\|_\infty < M$ para todo $f \in A$. *Hint.* Demuestre que $|f(0)| \leq 2$ para todo $f \in A$.

   (b) Demuestre que A es un subconjunto compacto en $C([0,1], \|\cdot\|_\infty)$.

   Hint. Muestre que $|f(0)| \leq 2$ para todo $f \in A$.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y para $\delta \in \mathbb{R}$ defina $f_\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_\delta(x) = f(x + \delta)$.

   (a) Suponga que $f \in L_1(\mathbb{R})$. Demuestre que $f_\delta \in L_1(\mathbb{R})$ para todo $\delta > 0$ y que $f_\delta \to f$ en la norma $\|\cdot\|_1$ para $\delta \to 0$.

   (b) Suponga que $f \in L_\infty(\mathbb{R})$. Demuestre que $f_\delta \in L_\infty(\mathbb{R})$ para todo $\delta > 0$ y que en general no es cierto que $f_\delta \to f$ en la norma $\|\cdot\|_\infty$ para $\delta \to 0$.

4. Para todo $n \in \mathbb{N}_0$ calcule la integral $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln x \,\mathrm{d}x$ y concluya el valor de

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x - 1} \,\mathrm{d}x.$$

   Hint. $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

5. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa y suponga que su parte real $\operatorname{Re} f(x+iy)$ es un polinomio en x y y donde $x, y \in \mathbb{R}$. Muestre que f es un polinomio en z.

6. Sean E y F espacios de Banach sobre $\mathbb{R}$ y sea

$$a : E \times F \to \mathbb{R}$$

una forma bilineal que satisface

(a) para todo $x \in E$ fijo, el mapa $y \mapsto a(x, y)$ es continuo y

(b) para todo $y \in F$ fijo, el mapa $x \mapsto a(x, y)$ es continuo.

Demuestre que existe una constante $C \geq 0$ tal que $|a(x, y)| \leq C\|x\| \, \|y\|$ para todo $x \in E$ y todo $y \in F$.

7. Considere el operador $T : \ell_\infty(\mathbb{N}) \to \ell_\infty(\mathbb{N})$ definido por

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = \left(x_1, \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dots \right).$$

(a) Demuestre que T es acotado y encuentre $\|T\|$.

(b) Diga si T es inyectivo y si es sobreyectivo.

Pruebe sus afirmaciones.