EXAMEN DE ÁREA ANÁLISIS

1. Problema 1

Considere la ecuación integral

$$\phi(t) = a + \int_0^t K(\phi(\tau))\, d\tau, \tag{1}$$

donde $K : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable con derivada en $L^\infty(\mathbb{R})$. Muestre que existe $t_* > 0$ y una función $\varphi \in L^\infty([0, t_*])$ que satisface (1). Es la φ que encontró diferenciable?

2. Problema 2

2.1. **a.** Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones en $C^1((a,b)) \cap C([a,b])$ (esto es diferenciables con derivada continua en (a,b) y continuas en $[a,b]$). Muestre que si $f_n \to f$ y $f_n' \to g$ uniformemente en ambos casos, $f' = g$.

2.2. **b.** Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones monótonas en $C([a,b])$ y suponga que las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a), \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(b)$$

convergen absolutamente. Muestre que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$$

converge uniformemente.

3. Problema 3

Calcule la integral

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\, dx$$

usando técnicas de variable compleja. Debe justificar rigurosamente sus cálculos.

4. Problema 4

Considere el operador $T : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\int_{\mathbb{R}} f(\tau) \cos\tau\, d\tau.$$

Muestre que efectivamente T es un funcional lineal de $L^1(\mathbb{R})$ y, a partir de la definición de la norma de un operador, calcule su norma.

Date: Mayo 2023.

5

Sea $K \neq \emptyset$ un subconjunto convexo y cerrado de un espacio de Hilbert H y $x \in H$. Denote por $Px \in K$ el único punto de K tal que $\|Px - x\| \leq \|y - x\|$ para todo $y \in K$. Muestre que para todo $x, y \in H$,

$$\|Px - Py\| \leq \|x - y\|.$$

6

Considere dos sucesiones de funciones medibles $f_n, g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, tales que

$$f_n \text{ converge a } 0 \text{ c.s. on } [0,1] \text{ y } \sup_n \int_0^1 |g_n| dx < \infty.$$

(a) Dé un ejemplo de sucesiones f_n y g_n, tales que

$$\int_0^1 f_n g_n dx \not\to 0.$$

(b) Muestre que para cualesquiera tales sucesiones f_n y g_n y todo $\epsilon > 0$ hay un conjunto medible $E \subset [0,1]$ tal que $\mu(E) > 1 - \epsilon$ y $\int_E f_n g_n \to 0$.

7

Dé un ejemplo de una función medible de Borel $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y)$ es integrable en el sentido de Lebesgue con respecto a y para todo x fijo, e integrable en el sentido de Lebesgue integrable con respecto a x para todo y fijo, las funciones $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy$ y $y \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx$ son integrables en el sentido de Lebesgue, pero

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy \right] dx \neq \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dx \right] dy.$$