Exámen de Area Análisis, Mayo 2019

Duración 180 minutos

A. Ould

1. [/8 pts] Justificando sus respuestas

   a) [/4 pts] dar un ejemplo de una sucesión de funciones $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que f_n converge uniformemente a una función f sobre toda parte acotada $\mathbb{R}$ pero no converge a f uniformemente en todo $\mathbb{R}$.

   b) [/4 pts] dar un ejemplo de una sucesión de funciones $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que converge uniformemente a una función g sobre todo $\mathbb{R}$.

2. [/6 pts]

   Sean (M, d) un espacios métrico completo, $f : M \to M$ y notemos $f^n = \underbrace{f \circ f \circ f \cdots f}_{n \text{ veces}}$ y supongamos que existe una sucesión $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de reales positivos tal que la serie $\sum_n \lambda_n$ es convergente y que f^n es λ_n-Lypchitz sobre M.

   Recordar que una función $h : (X, d) \to (Y, d')$ es k-Lypchitz sobre X si

   $$d'(f(s), f(t)) \le k\ d(s, t)$$

   para todo s y t en X.

   Mostrar que existe un único punto fijo $a \in M$ para f y que para todo $x_0 \in M$ la sucesión $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a a.

3. [/8 pts]

   Sea el espacio de medida $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), \mu)$ donde μ es la medida de conteo es decir $\mu(A) = \text{card}(A)$ para $A \subset \mathbb{N}$

   a) [/3 pts] Para una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, justifica la igualdad

   $$\int_{\mathbb{N}} f\ d\mu = \sum_{n\ge 0} f(n)$$

   b) [/5 pts] Sea $(x_{n,m})_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ m\in\mathbb{N}}}$ una sucesión doble de términos no negativos. Mostrar que

   $$\sum_{n\ge 0}\sum_{m\ge 0} x_{n,m} = \sum_{m\ge 0}\sum_{n\ge 0} x_{n,m}$$

   Deducir del numeral anterior la suma de la serie

   $$\sum_{n\ge 2}\sum_{m\ge 2} \frac{1}{n^m}$$

4. [/6 pts] Calcular la integral

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\ dx$$

5. [/8 pts] Para $1 \leq p < \infty$ se consideran los espacios

$$\ell^p = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \; ; \sum_{n \geq 0} |x_n|^p < \infty \right\}$$

con la norma

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n \geq 0} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

a) [/3 pts] Mostrar que $\ell^1 \subsetneq \ell^2$ y que la inclusión $i : \ell^1 \to \ell^2$ es continua.

b) [/5 pts] Mostrar que ℓ^1 no es cerrado en ℓ^2.