Examen de Conocimientos
en el área de Análisis 201820

Nombre: ____

Problema 1. Sea f una función continua definida en el intervalo $[a, +\infty)$ y supongamos que el límite $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe y es finito, entonces f es uniformemente continua en el intervalo $[a, +\infty)$.

Problema 2. a) Sea f una función holomorfa del disco unitario $D = \{z : |z| < 1\}$ en sí mismo tal que $f(0) = 0$. Pruebe que $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in D$. (Ayuda: considere la función $f(z)/z$)

b) Para cuales f (definidas como en a)) existe un punto $c \neq 0$ en D tal que $|f(c)| = |c|$?

c) Sea h una función holomorfa del disco unitario D en sí mismo pero distinta a la identidad en D. Pruebe que h tiene a los sumo un punto fijo.

Problema 3.

Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio medible donde μ es una medida positiva y sea $f : X \to \mathbb{C}$ una función medible.

a) Pruebe que si $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, entonces $\lim_{n\to\infty} n\mu\{|f| \geq n\} = 0$.

b) Considere la función $f(x) = \frac{1}{x\ln(x^{-1})}$ definida en le intervalo $[0, e^{-1}]$ para probar que el recíproco es falso.

Problema 4. Sea L^p el espacio $L^p(\mu)$ donde μ es la medida de Lebesgue en $(0, +\infty)$ y $\|u\|_p$ es la norma L^p de la función u.

Sea $p > 1$ y sea $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una function nonegativa en L^p con soporte compacto $[a, b]$ contenido en $(0, +\infty)$. Defina

$$(Hf)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

(a) Pruebe que Hf pertenece a L^p.

(b) Aplique integral por partes a la integral

$$\int_0^{+\infty} F(x)^p \frac{d}{dx}(x)dx$$

justificando cada paso para concluir la validez de la siguiente igualdad

$$p\int_a^b F(x)^{p-1}f(x)dx = (p-1)\int_a^{+\infty} F(x)^p dx$$

donde escribimos $F(x) = (Hf)(x)$

(c) Pruebe que $\|Hf\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p$.

Problem 5. Sea $H = L^2([0,2])$ y sea $T : L^2([0,2]) \to L^2([0,2])$ dada por $T(f) = x^2 f$.

(a) Pruebe que T es un operador autoadjunto.

(b) Pruebe que $\|T\| = 4$.

(c) Pruebe que $\sigma_p(T) = \emptyset$.

(d) Pruebe que $\sigma_c(T) = [0,4]$.

Problema 6. a) Para $f \in C_{\mathbb{R}}([0,1])$, pruebe que $f \geq 0$ si y solo si $\|\lambda - f\|_u \leq \lambda$ para todo $\lambda \geq \|f\|_u$, donde escribimos $\|\cdot\|_u$ para la norma del supremo.

(b) Suponga que $E \subseteq C_{\mathbb{R}}([0,1])$ es un subespacio cerrado que contiene la función constante 1. Para $\phi \in E^*$, se escribe $\phi \geq 0$ si $\phi(f) \geq 0$ para todo $f \in E$ con $f \geq 0$. Pruebe que $\phi \geq 0$ si y solo si $\|\phi\| = \phi(1)$.

Problema 7. Considere el espacio de Hilbert $l_2(\mathbb{N})$ y sea $e_n \in l_2(\mathbb{N})$ definida por $e_n(i) = \delta_{in}$.

(a) Pruebe que si una sucesión $\{a_n\}_n$ converge en la topología de la norma también converge en la toplogía débil.

(b) Pruebe que en la topología de la norma, $\{e_n\}_n$ no tiene subsucesiones convergentes.

(c) Pruebe que en la topología débil, $\{e_n\}_n$ converge y halle el vector su límite $a = w\text{-}\lim_{n\to\infty} e_n$.

(d) Encuentre una sucesión de combinaciones convexas de $\{e_n\}_n$ que converge a a en la topología de la norma.