Departamento de Matemáticas – Universidad de los Andes

Examen de Conocimiento — Análisis

18 de Julio 2018

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Las respuestas deben ser justificadas.

Favor marcar cada hoja únicamente con su cédula (**no*** indique su nombre).**

Tiempo máximo: 180 minutos.

I. Sea $\mathcal{F}$ una familia equicontinua de funciones definidas en el intervalo $[a, b]$. Suponga que existe una constante $C > 0$ tal que $|f(a)| < C$ para todo $f \in \mathcal{F}$. Demuestre que $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada.

II. Sea f una función continua. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} n \int_0^1 x^{n+2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

III. Sea $\mathrm{M}(\mathbb{R})$ el espacio de las medidas complejas de *Borel* regulares (a variación acotada) sobre $\mathbb{R}$ con operaciones puntuales y normado por la variación total

$$\|\nu\| := |\nu|(\mathbb{R}) := \sup\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}|\nu(M_n)| : \mathbb{R} = \bigsqcup M_n,\ M_n \in \mathcal{B}, \text{ disjuntos dos a dos}\Big\}.$$

Defina $\psi : \mathcal{L}_1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}(\mathbb{R})$ por $\psi(f) = \mu_f$, donde μ_f es la medida definida por

$$\mu_f(E) = \int_E f\, d\lambda, \qquad \text{para } \ E \in \mathcal{B}.$$

1. Muestre que ψ es una isometría.
2. Determine si ψ es sobreyectiva o no.

IV. Sea $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Calcule la siguiente integral con el método de residuos:

$$\int_0^\infty \frac{x\sin(x)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x.$$

V. Sean H un espacio de Hilbert, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ y $z \in H$. Demuestre que $x_n \to z$ si y solamente si

$$x \xrightarrow{w} z \quad \text{y} \quad \|x_n\| \to \|z\|.$$

VI. Sea $T : \ell_1(\mathbb{N}) \to \ell_1(\mathbb{N}),\ T(x_1, x_2, x_3 \dots) = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \dots)$.

1. Calcule el operador adjunto T'
2. Calcule el espectro, el espectro puntual, el espectro continuo y el espectro residual de T (es decir, calcule $\sigma(T),\ \sigma_p(T), \sigma_c(T), \sigma_r(T)$).