EXAMEN DE CONOCIMIENTOS: ANÁLISIS.
TIEMPO: 3 HORAS

No se permite el uso de ningún tipo de ayuda, esto incluye apuntes, libros, calculadoras, laptops, etc. Los celulares DEBEN permanecer apagados. Para obtener crédito en las respuesta estas deben estar justificadas

1. Determine si existe el siguiente límite. Si existe calcule su valor explicando claramente todos sus pasos, si no existe explique porqué.

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\sin(x))^n}{x^2}\,d\lambda(x).$$

(En este ejercicio λ denota la medida es la de *Lebesgue*).

2. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie absolutamente convergente. Sea $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ una biyección. Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$ es convergente y que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}.$$

3.

a. Para una norma cualquiera $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^2$, y una base cualquiera $\{e_1, e_2\}$, defina la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ por

$$f(r) = \|e_1 + re_2\|.$$

Muestre que f es continua.

b. Muestre que existe un $R>0$ tal que

$$\inf_{r\in\mathbb{R}} f(r) = \inf_{|r|\le R} f(r).$$

De esto concluya que existe un $\delta>0$ tal que

$$\inf_{r\in\mathbb{R}} f(r) = \delta.$$

c. Use el punto anterior para demostrar lo siguiente. Dada una norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^2$, existe un $M>0$ (que puede depender de la norma) tal que si

$$x = a_1e_1 + a_2e_2, \quad \text{y } \|x\| = 1,$$

entonces

$$|a_1|\le M \quad \text{y} \quad |a_2|\le M.$$

d. Sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ normas arbitrarias de $\mathbb{R}^2$. Demuestre que dado $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|x\|_1 = 1$, existe $\alpha > 0$ tal que

$$\|x\|_2 \leq \alpha.$$

Concluya que las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes.

4. Sea $(E_n)_n$ una sucesión de subconjuntos medibles en un espacio de medida finito $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Defina

$$\limsup_{n\to\infty} E_n := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n\geq k} E_n.$$

Muestre que $\limsup\limits_{n\to\infty} E_n$ y si se tiene que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$, entonces $\mu(\limsup\limits_{n\to\infty} E_n) = 0$.

5. Escriba una curva suave $t \mapsto \gamma(t)$ donde $t \in [0, 2\pi]$ y la imagen de γ es la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Calculando $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ de dos formas distintas muestre que

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}.$$

6. Calcule la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(1+x)^2}$$

usando el método de residuos.