Examen de Conocimiento en Análisis
20 de noviembre de 2017

Justifique matemáticamente todas sus respuestas. Si usa algún teorema, explique claramente cuál es y por qué es aplicable. Respuestas sin prueba no valen. No es permitido el uso de ningún tipo de ayuda (libros, calculadoras, dispositivos electrónicos etc.). Todos los dispositivos electrónicos deben permanecer apagados y guardados.

Tiempo: 3 horas.

Problema 1. Determine si $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es uniformemente continua en

(a) $[b, 1)$ para $b \in (0, 1)$,

(b) $(0, 1)$.

Problema 2. Sea $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{x}{n^2}\, \mathrm{e}^{-x/n}$.

(a) Demuestre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente y especifique la función límite.

(b) Calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x$ y $\displaystyle\int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Comente sus resultados.

Problema 3. Sea $f \in L^2([0, 1], \lambda)$ donde λ es la medida de Lebesgue y defina

$$g(x) = \int_{[0,x]} f \ \mathrm{d}\lambda, \qquad x \in [0, 1].$$

(a) Demuestre que $\displaystyle\lim_{x\to 0} g(x) = 0$.

(b) Demuestre que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{\sqrt{x}} = 0$.

Problema 4. Sea X un espacio normado y sea $S := \{x \in X : \|x\| = 1\}$. Demuestre que X es completo si y solo S lo es.

Problema 5. Sea H un espacio de Hilbert y sea $P : H \to H$ una proyección ortogonal. Demuestre que P es un operador compacto si y solo si su imagen tiene dimensión finita.

Problema 6. Sean X un espacio de Banach y Y un espacio normado. Sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de operadores lineales continuos tal que para todo $x \in X$ la sucesión $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. Demuestre que

$$T : X \to Y, \quad Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$$

define un operador lineal continuo.