EXAMEN DE CONOCIMIENTO DE ANÁLISIS., NOVIEMBRE 2015.

1. **a.** Sea $f_n : X \longrightarrow \mathbf{C}$ una sucesión de funciones. Asuma que existen M_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ tales que $|f_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in X$, y

$$\sum_n M_n < \infty.$$

Demuestre que $\sum_n f_n(x)$ converge uniformemente.

b. Considere la función para $s \in \mathbf{C}$ definida por

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Muestre que ζ es continua para $\mathrm{Re}(s) > 1$.

2. Sea (X, μ) un espacio de medida σ-finito y $f_n : X \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones medibles y suponga que $f_n \to 0$ en $L^1(X, \mu)$. Demuestre que $f_n \to 0$ en casi todo punto.

3. Sea $u : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto, una función armónica (esto es una función suave) tal que

$$\Delta u = 0 \quad \text{en} \quad \Omega.$$

a. Suponga que $0 \in \Omega$ y $\rho > 0$ tal que la bola de radio ρ centrada en 0, $B_\rho \subset \Omega$. Sea $\frac{\partial}{\partial r}$ el vector unitario radial. Demuestre que para todo $r > 0$ tal que $r \leq \rho$

$$\frac{\partial}{\partial r} \int_{S_r} u(x, y)\, ds = 0,$$

donde S_r es el círculo de radio $r > 0$ centrado en el origen

b. Use el punto anterior (aunque no lo haya resuelto) para demostrar que

$$u(0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{S_r} u(x, y)\, dxdy.$$

c. Use el punto anterior (aunque no lo haya resuelto) para demostrar que

$$u(0) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{B_r} u(x, y)\, dxdy.$$

4. Demuestre que la función $f(x) = \cos x$ es real analítica, esto es muestre directamente que su serie de Taylor centrada en un punto a converge a la función.

5. Sea

$$c_0 = \left\{ (x_n)_{n=1,2,3,\ldots} : x_n \in \mathbf{R} \quad \text{y} \quad x_n \to 0 \right\}.$$

Muestre que c_0 es denso en l^p, para $1 \leq p < \infty$. Es c_0 denso en l^∞?

6. Calcule la serie de Fourier de la función periodica $f(\theta) = \theta^2$ y utilize la serie para calcular la suma de las series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$. Importante: f está definida en $-\pi \leq \theta \leq \pi$ y es extendida a todo $\mathbb{R}$ por periodicidad.