# Examen de Conocimiento en Análisis
# 14 de mayo de 2015

*Justifique todos los pasos. Si usa algún teorema, explique claramente cuál es y por qué es aplicable. Respuestas sin prueba no valen. No es permitido el uso de ningún tipo de ayuda (libros, calculadoras, dispositivos electrónicos etc.). Los celulares deben permanecer apagados.*

***Tiempo: 3 horas.***

**Problema 1.** Sea $0 < \alpha \leq 1$. Determine si las siguientes integrales convergen o divergen. Pruebe su respuesta.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right|\,\mathrm{d}x.$$

**Problema 2.** Sea $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ una función no-decreciente. tal que

$$\liminf_{n\to\infty} \big(f(n+1) - f(n)\big) > 0.$$

Demuestre que

$$\text{(a)} \quad \liminf_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} > 0, \qquad \text{(b)} \quad \liminf_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} > 0.$$

**Problema 3.** Sea $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ un espacio de medida y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles $X \to \mathbb{C}$. Suponga que $\sum_{n=1}^\infty |f_n|$ es integrable. Demuestre que

$$\int_X \sum_{n=1}^\infty f_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

**Problema 4.** Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo con $\mathbb{R} \subseteq U$. Suponga que $U$ es invariante bajo translaciones $z \mapsto n+z$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Sea $f : U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que $f(x+n) = f(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y $x \in \mathbb{R}$. Se sigue que $f(z+n) = f(z)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y $z \in U$? Prueba su afirmación.

**Problema 5.** Sea $X$ un espacio de Banach, $Y$ un espacio normado y $T_n : X \to Y$ operadores lineales acotados con $\lim_{n\to\infty} \|T_n\| = \infty$. Demuestre que existe por lo menos un $x_0 \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|T_n x_0\| = \infty$.

**Problema 6.** Considere el operador

$$T : \ell_2(\mathbb{N}) \to \ell_2(\mathbb{N}), \quad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto Tx = (2^{-n}x_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

(a) ¿Es $T$ compacto? ¿Es unitario? ¿Es autoadjunto? Pruebe sus afirmaciones.

(b) Calcule el espectro puntual, residual y continuo de $T$.