Examen de Conocimiento en Análisis
20 de noviembre de 2014

Justifique todos los pasos. Si usa algún teorema, explique claramente cuál es y por qué es aplicable. No es permitido el uso de ningún tipo de ayuda (libros, calculadoras, dispositivos electrónicos etc.). Los celulares deben permanecer apagados.

Tiempo: 3 horas.

Problema 1. Calcule el límite $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{2\pi k}{2n+1}\right)$.

Problema 2. Determine si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)$ converge o diverge.

Problema 3. Encuentre todos los valores del parámetro a para que el intervalo $[0,1]$ pertenezca a la imagen de la función

$$f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad f_a(x)=\frac{3ax}{x^2+x+1}+2a^2-2.$$

Problema 4. Sea X un espacio de Banach y $T:X\to X$ un operador lineal acotado.

(a) Defina la norma $\|T\|$ de T.

(b) Suponga adicionalmente que existe una constante $C>0$ tal que $\|Tx\|\geq C\|x\|$ para todo $x\in X$. Demuestre que T es invertible y que $T^{-1}:\operatorname{rg}(T)\subseteq X\to X$ es acotado.

(c) Demuestre que el rango de T es cerrado.

Problema 5. Calcule el valor de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin(2x)}{x^2+3}\,\mathrm{d}x$.

Problema 6. De las siguientes sucesiones de funciones determine si convergen λ-casi siempre, si convergen en medida, si convergen en $\mathscr{L}_p$ $(1\leq p\leq\infty)$. Si convergen, halle la función límite. (λ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Recuerde que $f_n\to g$ *en medida* si $\lim_{n\to\infty}\lambda\{x:|f_n(x)-g(x)|\geq\varepsilon\}=0$ para todo $\varepsilon>0$.)

$$f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad f_n=\chi_{[n,\infty)},$$

$$h_n:[0,1]\to\mathbb{R},\qquad h_n(x)=\begin{cases} n^2x, & 0\leq x\leq 1/n,\\ 2n-n^2x, & 1/n<x\leq 2/n,\\ 0, & 2/n<x\leq 1.\end{cases}$$