Departamento de Matemáticas Universidad de los Andes

EXAMEN DE ÁREA - ANÁLISIS
22 de Mayo 2014
(Tiempo: 3 horas)

No se permite el uso de ningún tipo de ayuda, esto incluye apuntes, libros, calculadoras, laptops, etc. Los celulares DEBEN permanecer apagados. Para obtener crédito en las respuesta estas deben estar justificadas.

1. Sea $(x_n)_{n=1,2,3,\ldots}$ una sucesión de reales.

a) Suponga que $|x_n - x_{n+1}| \leq \frac{1}{n \log^2 n}$ para $n \geq 2$. ¿Converge o diverge $(x_n)_n$?

b) Suponga que $|x_n - x_{n+1}| < \frac{1}{n}$ y (x_{2n}) converge. ¿Es $(x_n)_n$ convergente?

2. Dada la función de variable real

$$s(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n + n^2 x}.$$

a) Halle el dominio de definición de s.

b) Muestre que s es continua en $(0, \infty)$.

3. **a)** Enuncie el Teorema de la Convergencia Dominada y el Teorema de la Convergencia Monóntona.

b) Muestre, justificandolo de manera rigurosa, que

$$\sum_{n \geq 0} \int_0^1 x^{2n} (1 - x) \, dx = \ln 2.$$

4. Sea $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = \infty$. Mostrar que f tiene un mínimo.

5. Muestre que la bola cerrada $B_1(0) \subset l^2$ (de radio 1 y centrada en el origen) no es compacta (Si utiliza el teorema que dice: en un espacio de Banach la bola unitaria es compacta si y sólo si es de dimensión finita, DEBE demostrarlo).

6. En un espacio de Hilbert H, sea (U_n) una sucesión de operadores unitarios que converge débilmente a un operador unitario U. Muestre que U_n converge fuertemente a U.

7. Use el cálculo de residuos, justificando rigurosamente cada paso, para calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1 + x^2} \, dx.$$