EXAMEN DE CONOCIMIENTOS EN ANÁLISIS
28 de noviembre de 2012

Tiempo: 3 horas.

Justifique todos los pasos. Si usa algún teorema, explique claramente cual y por qué es aplicable.

1. Para $\alpha \in (0,\infty)$, define $f_\alpha : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = x^\alpha \ln x$. Determine para cuales valores de α la función f_α es uniformemente continua.

2. Considere una sucesión de funciones $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a una función f. Suponga que para cada $c \in [0,1]$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es equicontinua en c.[1] Muestre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente convergente.

3. Determine si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\![\sqrt{n}]\!]}}{n}$ converge. Pruebe su afirmación. ($[\![x]\!]$ denota la parte entera de x.)

4. Calcule $\displaystyle\int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

5. Sea $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ y $1 \le p < q \le \infty$.
   (a) Suponga que $\mu(X) < \infty$. Muestre que $L_q(X) \subset L_p(X)$.
   (b) Suponga que X es a lo más contable y μ es la medida de conteo. Muestre que siempre $L_p(X) \subseteq L_q(X)$ y que $L_p(X) \subsetneq L_q(X)$ si X tiene infinitos (contables!) elementos.

6. Sean $K : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{C}$ y $g : [0,1] \to \mathbb{C}$ funciones continuas. Muestre que existe exactamente una función continua $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ tal que

$$f(x) = \int_0^x K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y + g(x), \qquad x \in [0,1].$$

   Ayuda. Puede ser útil definir el mapa lineal $T : C[0,1] \to C[0,1]$, $(Tf)(x) = \int_0^x K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y$ y estimar $\|T^n f(x)\|$.

7. Sea X un espacio de Banach un $A : X \to X$ un operador lineal y compacto.
   (a) Muestre que A es acotoda.
   (b) Sea $z \in \mathbb{C}$ con $|z| > \|A\|$. Muestre que $z \in \varrho(A)$ y que $(A-z)^{-1} - \frac{1}{z}$ es compacto.
   (c) Describe el espectro de $(A-z)^{-1}$ (tipo de espectro? acotado? puntos de acumulación? etc.)

---

[1] $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es *equicontinua en c*, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in [0,1]$ con $|x-c| < \delta$, $|f_n(x) - f_n(c)| < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.