Examen de Área de Análisis

1 de Diciembre de 2011

1. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Para n entero positivo se define la función
$$f_n(x) = (-1)^n \frac{\alpha^n x}{1+n^2x^2}.$$
   (a) Hallar en función de α el dominio de definición de la función
$$f(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x).$$
   (b) Estudiar la continuidad de f en función de α.

2. (a) Enunciar de manera rigurosa el teorema de la convergencia dominada.
   (b) Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $f \in \mathcal{L}^1(X)$. Mostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tales que
$$\text{para todo } A \in M,\ \mu(A) < \delta \Rightarrow \left| \int_A f \, d\mu \right| < \varepsilon.$$

3. Se considera el espacio $C^{\frac{1}{2}}([0,1])$ de funciones del intervalo $[0,1]$ en $\mathbf{R}$ que satisfacen la siguiente condición: $f \in C^{\frac{1}{2}}([0,1])$ si y sólo si existe un $c > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in [0,1]$
$$|f(x) - f(y)| \leq c\,|x-y|^{\frac{1}{2}},$$
Para $f \in C^{\frac{1}{2}}([0,1])$ se define
$$\|f\|_{\frac{1}{2}} = \inf\left\{c : |f(x) - f(y)| \leq c\,|x-y|^{\frac{1}{2}}\right\}.$$
   (a) Mostrar que $\|\cdot\|_{\frac{1}{2}}$ es una norma.
   (b) Mostrar que $C^{\frac{1}{2}}([0,1])$ con la norma $\|\cdot\|_{\frac{1}{2}}$ es un espacio de Banach.

4. Sea la topología en $\mathbf{R}$ definida por la siguiente base
$$\mathcal{B} = \{[a,b) : a < b\}.$$
   (a) Mostrar que $\mathbf{R}$ con la topología generada por la base $\mathcal{B}$ tiene un subconjunto denso enumerable.
   (b) Mostrar que si un espacio topológico es metrizable y tiene un subconjunto denso enumerable entonces es segundo contable (i.e., tiene una base enumerable para su topología).
   (c) Mostrar que $\mathbf{R}$ con la topología generada por $\mathcal{B}$ no es metrizable.

5. (a) Enunciar el el teorema de Liouville.
   (b) Mostar que si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función entera entonces su imagen $f(\mathbb{C})$ es densa en $\mathbb{C}$.