EXAMEN DE CONOCIMIENTOS EN ANÁLISIS
26 de mayo de 2011

Tiempo: 3 horas.

Justifique todos los pasos. Si usa algún teorema, explique claramente cual y porque es aplicable.

1. Compruebe directamente (utilizando ε y δ) la continuidad uniforme de la función

$$f : [1,2] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sqrt{x^2 - 1}.$$

2. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función derivable con derivada continua tal que $f(0) = f(1) = 0$. Suponga que f no es constante. Muestre que existe un punto $c \in [0,1]$ tal que

$$|f'(c)| > 4 \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Sea $(a_n)_n$ una sucesión de números reales tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n =: s < \infty, \qquad g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}, \quad x \geq 0.$$

   (a) Justifique todos los pasos en la demostración del resultado

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x} g(x)\,\mathrm{d}x = s.$$

   (b) Considere la función

$$\mathrm{Si}(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t, \quad x \geq 0.$$

   Encuentre el valor de la integral $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{Si}(x)\,\mathrm{d}x$.

4. Sea f una función holomorfa en una vecindad de $D := \{|z| \leq 4\}$ tal que $f(z) \neq 0$ si $|z| = 4$. Suponga que para $k = 0, 1, 2$

$$\int_{|\zeta|=4} \frac{\zeta^k f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,\mathrm{d}\zeta = 2^{k+2}\pi\mathrm{i}.$$

   Encuentre todos los $z \in D$ donde $f(z) = 0$.

5. Sea H un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{R}$.

(a) Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en H tal que $\|x_n\| \leq 1$, $\|y_n\| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\langle x_n, y_n\rangle \to 1$ si $n \to \infty$. Muestre que $\|x_n - y_n\| \to 0$ si $n \to \infty$.

(b) Sea $T : H \to H$ un operador autoadjunto acotado y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en H tal que

$$1 = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx_n\| = \lim_{n\in\mathbb{N}} \|Tx_n\|.$$

Muestre que $T^2x_n - x_n \to 0$ si $n \to \infty$. Concluya que por lo menos uno de los operadores $T - \mathrm{id}$ o $T + \mathrm{id}$ no es invertible.

6. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{n}}}{(1+\frac{x}{n})^n}\,\mathrm{d}x = 1.$$

7. Pruebe que en el espacio de Banach $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ no se puede introducir una estructura de Hilbert, es decir: $\|\cdot\|_\infty$ no es inducida por un producto interno.